1 Berechnung der Weggrößen stabförmiger Tragwerke

1.1 Einführung

Jedes Tragwerk verformt sich infolge vorhandener Einwirkungen. Die Modellvorstellung des starren Körpers, von der wir in Baustatik 1 ausgegangen sind, muss aufgegeben werden, um Verformungen in die Betrachtungen einbeziehen zu können.

Warum müssen Verformungen überhaupt berechnet werden?

Bauwerke müssen nicht nur tragfähig, sondern auch gebrauchstauglich sein. Um die Gebrauchstauglichkeit eines Bauwerks gewährleisten zu können, müssen die Verformungen des Tragwerks beschränkt bleiben. Die Kenntnis der Verformungen ist also wichtig, um beurteilen zu können, ob ihre Größe die Nutzung des Bauwerks nicht beeinträchtigt.

Obwohl die Schnittgrößen bei statisch bestimmten Systemen nur mithilfe von Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden konnten, haben wir die aus der mechanischen Wirkung des Momentes resultierende Biegung der stabförmigen Bauteile als wichtiges Hilfsmittel für die Veranschaulichung des Tragverhaltens kennen gelernt.

Statisch unbestimmte Tragwerke können nur dann berechnet werden, wenn die Verformungen des Tragwerks berücksichtigt werden. Da bei statisch unbestimmten Systemen die Gleichgewichtsbedingungen nicht ausreichen, um die Schnittgrößen zu ermitteln, müssen als zusätzliche Gleichungen Verformungsbedingungen formuliert werden.

Auch wenn wir nicht mehr davon ausgehen, dass der Körper unverformbar, also starr ist, setzen wir jedoch voraus, dass die Verformungen so klein sind, dass ihr Einfluss auf die Ermittlung der Schnittgrößen vernachlässigt werden kann. Die Gleichgewichtsbedingungen werden in Bezug auf das unverformte Tragwerk formuliert, man nennt dies *Theorie I. Ordnung*.

Zur Erläuterung der Zusammenhänge betrachten wir den Kragträger in *Bild 1.1*. Im oberen Teil des Bildes ergibt sich das Auflagermoment im Einspannpunkt unter der Annahme des starren Kragträgers ohne Einfluss der Horizontalkraft F_h, da diese keinen Hebelarm bezüglich des Auflagerpunktes hat.

Berücksichtigen wir bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen, dass sich der Kragträger infolge der Vertikalkraft verformt, wie in *Bild 1.1* unten dargestellt ist, ergibt sich für das Auflagermoment ein zusätzlicher Anteil infolge der Horizontalkraft F_h, da aufgrund der Durchbiegung δ ein Hebelarm entstanden ist. Die Berücksichtigung dieses Einflusses wird mit *Theorie II. Ordnung* bezeichnet. Die Bedeutung dieses Einflusses für die Schnittgrößen ist von der Größe des Produkts $F_h \cdot \delta$ abhängig. Wir gehen in diesem Buch davon aus, dass die Verformung und die Normalkräfte so klein sind, dass die Gleichgewichtsbedingungen in Bezug auf das unverformte Tragwerk formuliert werden können. Die Größe der Verformung muss daher bekannt sein, um zu beurteilen, ob sie für die Formulierung des Gleichgewichts von Bedeutung ist.

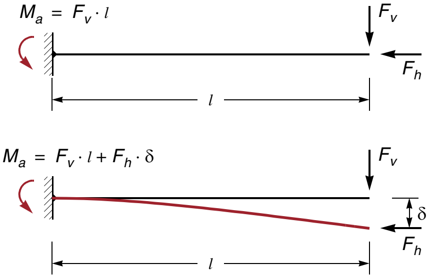

Bild 1.1 Einfluss der Verformungen auf die Schnittgrößen

Verformungen werden also benötigt:

- zum Nachweis der Gebrauchstauglichkeit eines Bauwerkes
- zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme (Verformungsbedingungen des Kraftgrößenverfahrens)
- zur Beurteilung des Einflusses der Verformung auf die Schnittgrößen (Theorie II. Ordnung)

Wir werden in diesem Buch nur *Stabtragwerke* betrachten. Das sind Tragwerke, die aus linienförmigen Bauteilen, also aus *Stäben* bestehen. Wie im Folgenden dargestellt wird, kann bei stabförmigen Bauteilen aus der Verformung der Stabachse auf die Verformung des gesamten Bauteils geschlossen werden.

1.2 Weggrößen

In Analogie zu inneren und äußeren Kräften unterscheidet man *innere* und *äußere Weggrößen.*

Äußere Weggrößen sind Verformungen, die an einem Bauteil von außen sichtbar sind bzw. sichtbar gemacht werden können. Beispiele äußerer Weggrößen sind Verschiebungen einzelner Punkte eines Bauteils oder Verdrehungen von Punkten der Schwerachse stabförmiger Bauteile.

Innere Weggrößen sind den inneren Kraftgrößen, also den Schnittgrößen zugeordnet. Es sind bezogene Größen, wie z. B. die Dehnung eines Stabes infolge einer Normalkraft. Allgemein werden die inneren Weggrößen als Verzerrungen bezeichnet.

1.3 Formänderungen

Jedes Bauteil ist ein dreidimensionaler Körper. Jeder Punkt seines Volumens kann sich in den drei Koordinatenrichtungen des Raumes bewegen. Die hier betrachteten *stabförmigen Bauteile* sind dadurch gekennzeichnet, dass eine Abmessung groß gegenüber den beiden anderen ist. Die Stablänge ist viel größer als die Abmessungen des Querschnittes.

Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, den Verformungszustand des dreidimensionalen Körpers „Stab" durch die Verformungen der Stabachse zu beschreiben. Dies gelingt durch Annahmen, also durch *Hypothesen*, wie in den nächsten Abschnitten dargestellt wird.

1.3.1 Formänderungen infolge von Dehnung

Wird ein Stab nur durch Normalkräfte beansprucht, kann unterstellt werden, dass in gewisser Entfernung von Punkten, in denen die Lasteinleitung erfolgt, die Verformungen aller Querschnittspunkte gleich sind. Aufgrund dieser Hypothese kann der gesamte Verformungszustand des Stabes durch die Verformung der Schwerachse beschrieben werden.

1.3.1.1 Kinematik

Die kinematischen oder geometrischen Beziehungen verknüpfen die inneren Weggrößen, also die Dehnungen bzw. allgemein Verzerrungen mit den äußeren Weggrößen, in diesem Fall die Axialverschiebung u.

Wir betrachten das differenzielle Element in *Bild 1.2*. Die unverformte Lage, auch Referenzkonfiguration genannt, ist schwarz dargestellt. Durch die Beanspruchung wird der Stab in Richtung seiner Achse um den Wert u verschoben. An der Stelle $x + \mathrm{d}x$ hat sich die Verschiebung um einen differenziellen Zuwachs verändert und beträgt $u + \mathrm{d}u$. Durch die differenzielle Änderung hat sich die Länge des Elementes um den Wert $\mathrm{d}u$ vergrößert, das Element wird gedehnt.

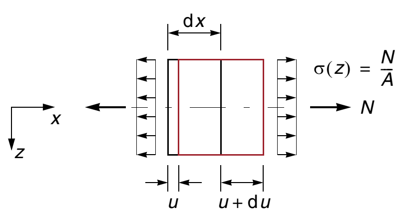

Bild 1.2 Differenzielles Element mit konstanter Dehnungsverteilung

Die Dehnung ist der Quotient aus Verlängerung und Ursprungslänge:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u' = \varepsilon_N + \varepsilon_{T_0} \tag{1.1}$$

1.3.1.2 Stoffgesetz

Die elastischen Dehnungen hängen mit den Spannungen über das Werkstoffgesetz zusammen. Es wird im Rahmen dieses Buches nur das *Hookesche*[1] *Gesetz* betrachtet, also linear elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Dehnung und Spannung ist der Elastizitätsmodul E.

$$\sigma = E\varepsilon_N \Rightarrow \varepsilon_N = \frac{\sigma}{E}$$

1 Robert Hooke (1635 – 1703), britischer Physiker

Sind die Dehnungen im Querschnitt konstant, so folgt daraus auch eine konstante Spannungsverteilung im Querschnitt:

$$\sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow \varepsilon_N = \frac{N}{EA} \tag{1.2}$$

Ein zusätzlicher, über den Querschnitt konstanter Dehnungsanteil ergibt sich aus einer gleichmäßigen Temperaturänderung T_0. Der Begriff Temperaturänderung bedeutet, dass sich die Temperatur zwischen zwei Zeitpunkten geändert hat. Die Dehnung infolge der Temperaturbeanspruchung ist der Temperaturänderung T_0 proportional. Der Proportionalitätsfaktor α_T ist eine Werkstoffkonstante, er wird auch als Temperaturausdehnungskoeffizient bezeichnet

$$\varepsilon_{T_0} = \alpha_T \cdot T_0 \tag{1.3}$$

Die gesamte Dehnung des Materials ist die Summe beider Anteile:

$$\varepsilon = \varepsilon_N + \varepsilon_{T_0} = \frac{N}{EA} + \alpha_T \cdot T_0 \tag{1.4}$$

1.3.1.3 Verträglichkeit

Die Verträglichkeitsbedingung besagt, dass die Dehnung aus der kinematischen Beziehung in Gl. (1.1) gleich der Dehnung aus der werkstofflichen Beziehung in Gl. (1.4) sein muss.

Damit ergibt sich die Differenzialgleichung 1. Ordnung für die Längsverschiebung *u:*

$$u' = \frac{N}{EA} + \alpha_T \cdot T_0 \tag{1.5}$$

Die zweite Ableitung der Verschiebung lautet:

$$u'' = \frac{N'}{EA} + \alpha_T \cdot T_0' \quad \text{für } EA = \text{konst.} \tag{1.6}$$

1.3.1.4 Gleichgewicht

Der differenzielle Zusammenhang zwischen der Normalkraft und der verteilten Belastung in Richtung der Stabachse ergab sich in Baustatik 1 zu:

$$N' = -p(x) \tag{1.7}$$

Daraus folgt die Differenzialgleichung 2. Ordnung des Dehnstabes durch Einsetzen von Gl. (1.7) in Gl. (1.6):

$$u'' = \frac{-p}{EA} + \alpha_T \cdot T_0' \tag{1.8}$$

Eine Übersicht über die Differenzialgleichungen des Dehnstabes ist in *Tabelle 1.1* angegeben.

Tabelle 1.1 Differenzialgleichungen des Dehnstabes

Differenzial-gleichung	Gleichgewicht	Stoffgesetz	Kinematik
1. Ordnung	$N' = -p$	$\varepsilon = \frac{N}{EA} + \alpha_T \cdot T_0$	$\varepsilon = u'$
		$u' = \frac{N}{EA} + \alpha_T \cdot T_0$	
2. Ordnung	$u'' = \frac{-p}{EA}$		

Beispiel 1.1

Für den in *Bild 1.3* dargestellten einseitig festgehaltenen Dehnstab ist der Verschiebungsverlauf infolge Eigengewicht zu ermitteln.

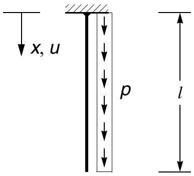

Bild 1.3 Einseitig festgehaltener Dehnstab unter Eigengewicht

Der Normalkraftverlauf lässt sich unmittelbar aus Gleichgewichtsbedingungen aufschreiben:

$$N(x) = p(l-x)$$

$$u' = \frac{N(x)}{EA} = \frac{p(l-x)}{EA}$$

$$u(x) = \int u'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{p(l-x)}{EA}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{p}{EA}\int (l-x)\,\mathrm{d}x = \frac{p}{EA}\left(lx - \frac{x^2}{2} + c\right)$$

Die Ermittlung der Integrationskonstanten c erfolgt durch Anpassung an die Randbedingung $u(0) = 0$.

$$u(0) = \frac{p}{EA}\left(l0 - \frac{0^2}{2} + c\right) = 0 \Rightarrow c = 0$$

Damit liegt der Verschiebungsverlauf fest:

$$u(x) = \frac{p}{EA}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)$$

Die Verschiebung ist anschaulich am freien Stabende maximal, also an der Stelle $x = l$. Mathematisch entspricht dies der Nullstelle der Ableitung des Verschiebungsverlaufes $u(x)$, die der Normalkraftfunktion proportional ist, siehe Gl. (1.5).

$$u_{max} = u(l) = \frac{p}{EA}\left(l^2 - \frac{l^2}{2}\right) = \frac{pl^2}{2EA}$$

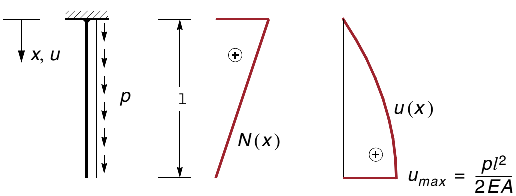

Bild 1.4 Verlauf von Längsverschiebung und Normalkraft

Beispiel 1.2

Für den in *Bild 1.5* dargestellten beidseitig festgehaltenen Dehnstab ist der Verschiebungsverlauf infolge der linear verteilten Streckenlast zu ermitteln.

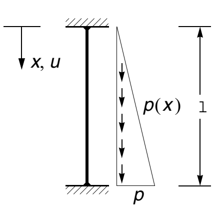

Bild 1.5 Beidseitig festgehaltener Dehnstab mit linear verteilter Belastung

Für diese Lagerung lässt sich die Normalkraft nicht mehr aus Gleichgewichtsbedingungen ermitteln, da zur Ermittlung von zwei unbekannten Auflagerkräften nur eine Gleichgewichtsbedingung ($\sum F = 0$ in Richtung der Stabachse) zur Verfügung steht. Es muss daher von der Differenzialgleichung 2. Ordnung, Gl. (1.8), ausgegangen werden:

$$u'' = \frac{-p(x)}{EA}$$

Die Lastfunktion $p(x)$ wird durch die folgende Geradengleichung beschrieben:

$$p(x) = \frac{p}{l}x$$

Diese Differenzialgleichung kann durch zweimalige Integration gelöst werden, wobei zwei unbekannte Integrationskonstante auftreten, die durch Anpassen der Lösung an die Randbedingungen ermittelt werden.

$$u'' = \frac{-p(x)}{EA} = \frac{-p}{l \cdot EA}x$$

$$u'(x) = \frac{-p}{l \cdot EA}\int x\,dx = \frac{-p}{2l \cdot EA}x^2 + c_1 = \frac{N}{EA}$$

$$u(x) = \frac{-p}{2l \cdot EA}\int x^2 dx + c_1\int dx = \frac{-p}{6l \cdot EA}x^3 + c_1 x + c_2$$

Randbedingungen: $u(0) = 0,\ u(l) = 0$

$$u(0) = \frac{-p}{6l \cdot EA}0^3 + c_1 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$u(l) = \frac{-p}{6l \cdot EA}l^3 + c_1 l = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{pl}{6EA}$$

Damit liegt der Verschiebungsverlauf fest:

$$u(x) = \frac{-p}{6l \cdot EA}x^3 + \frac{pl}{6EA}x = \frac{p}{6l \cdot EA}(l^2x - x^3)$$

Der Normalkraftverlauf folgt aus der Ableitung der Verschiebung:

$$u'(x) = \frac{N}{EA}$$

$$\Rightarrow N(x) = EAu'(x) = \frac{p}{6l}(l^2 - 3x^2) = \frac{pl}{6} - \frac{p}{2l}x^2$$

Die Verschiebung ist dort maximal, wo ihre Ableitung, also die Normalkraft, gleich null ist:

$$\frac{pl}{6} - \frac{p}{2l}x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Daraus folgt die maximale Verschiebung mit:

$$u_{\max} = u(x_0) = \frac{p}{6l \cdot EA}\left(l^2 \frac{l}{\sqrt{3}} - \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^3\right) = \frac{pl^2}{9\sqrt{3} \cdot EA}$$

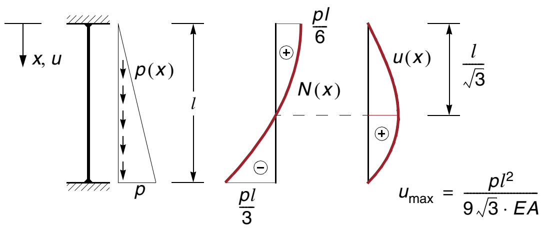

Bild 1.6 Verlauf von Längsverschiebung und Normalkraft

1.3.2 Formänderungen infolge von Biegung und Temperaturdifferenz

Auch im Fall der Biegebeanspruchung lassen sich die Verformungen des dreidimensionalen Bauteils „Balken" durch eine Hypothese aus den Verformungen der Schwerachse ableiten. Diese nach Jakob Bernoulli[1] benannte Hypothese unterstellt, dass die Querschnitte auch nach der Verformung eben und senkrecht zur Schwerachse bleiben.

In *Bild 1.7* ist die Biegeverformung eines einfachen Balkens dargestellt. Die dargestellten geraden Linien, die vor der Verformung senkrecht zur Balkenachse sind, sind auch nach der Verformung Geraden und senkrecht zur Balkenachse.

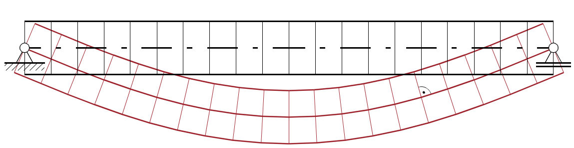

Bild 1.7 Verformungen des Bernoullischen Balkenmodells

1.3.2.1 Kinematik

Gesucht ist der Zusammenhang zwischen der Krümmung des Balkens als innere Weggröße und der Verschiebung der Balkenachse als äußere Weggröße.

1 Jakob Bernoulli (1655 – 1705), Schweizer Mathematiker

Wir betrachten zur Herleitung der kinematischen Beziehungen das differenzielle Balkenelement in *Bild 1.8*. Aufgrund der Wirkung des Biegemoments wird die untere Faser des Elements gezogen und verlängert sich. Entsprechend wird die obere Faser gedrückt und dadurch verkürzt. Die Querschnittslinien bleiben nach der Bernoulli-Hypothese auch im verformten Zustand gerade und sind senkrecht zur Schwerachse. Ersetzen wir die Kurve, die die Verformung der Schwerachse beschreibt, durch den Krümmungskreis, bilden alle Fasern des Balkenelements Segmente konzentrischer Kreise mit gleichem Zentriwinkel $d\varphi$.

Da wir eine reine Momentenbeanspruchung voraussetzen, wird die Schwerachse des Balkens nicht gedehnt und behält ihre ursprüngliche Länge dx. Eine Faser des Balkenelements in einer beliebigen Höhe z hat die Länge ds. Aufgrund der Ähnlichkeit der Kreisausschnitte folgt die Beziehung:

$$\frac{ds}{\rho + z} = \frac{dx}{\rho} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{\rho + z}{\rho} = 1 + \frac{z}{\rho}$$

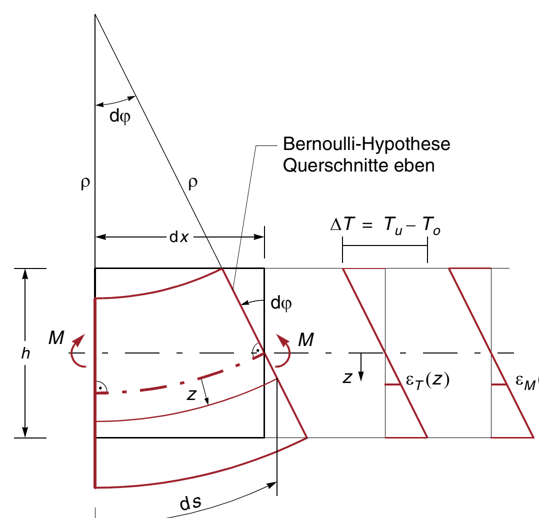

Bild 1.8 Differenzielles Balkenelement in verformter Lage

Die Dehnung der betrachteten Faser an der Stelle z beträgt:

$$\varepsilon(z) = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{ds}{dx} - 1$$

Mit $\frac{ds}{dx} = 1 + \frac{z}{\rho}$ folgt:

$$\varepsilon(z) = 1 + \frac{z}{\rho} - 1 = \frac{z}{\rho} \tag{1.9}$$

Die Dehnungen sind aufgrund der Bernoulli-Hypothese linear über den Querschnitt verteilt. Die Steigung der Geradengleichung ist der Reziprokwert des Krümmungsradius, also die Krümmung κ.

$$\varepsilon(z) = \kappa \cdot z \tag{1.10}$$

Die Krümmung einer Kurve gibt an, wie sich die Neigung ihrer Tangente mit zunehmender Bogenlänge ändert.

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}$$

Durch Anwendung der Kettenregel folgt:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{dw'} \cdot \frac{dw'}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = w'' \cdot \frac{d\varphi}{dw'} \cdot \frac{dx}{ds}$$

Mit $ds^2 = dw^2 + dx^2$ ergibt sich:

$$\frac{ds^2}{dx^2} = \frac{dw^2}{dx^2} + \frac{dx^2}{dx^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{w'^2 + 1}$$

Die Ableitung w' ist gleich dem Anstieg der Tangente an die Biegelinie, siehe *Bild 1.9*. Daher gilt:

$$w' = -\tan\varphi \text{ bzw. } \varphi = -\arctan w'$$

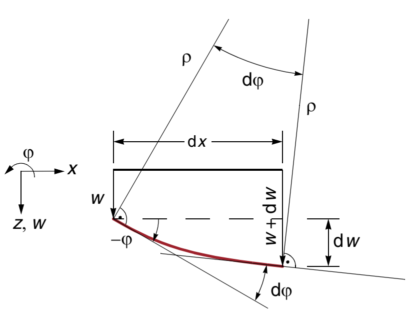

Bild 1.9 Geometrische Beziehungen an verformter Stabachse

Damit folgt:

$$\frac{d\varphi}{dw'} = \frac{-1}{1 + w'^2}$$

Die Krümmung der Biegelinie wird somit:

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = w'' \cdot \frac{d\varphi}{dw'} \cdot \frac{dx}{ds} = w'' \cdot \frac{-1}{1 + w'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{w'^2 + 1}}$$

$$\kappa = \frac{-w''}{(1 + w'^2)^{3/2}} \tag{1.11}$$

Wir werden uns im Folgenden auf die Betrachtung kleiner Verformungen beschränken. Diese Voraussetzung vereinfacht die Zusammenhänge erheblich und ist deswegen zulässig, da Tragwerke so ausgelegt werden müssen, dass die Gebrauchstauglichkeit gewährleistet ist.

Unter dieser Annahme ist die Neigung w' der Biegelinie so klein, dass ihr Quadrat gegenüber eins vernachlässigt werden kann, d. h. $w'^2 \ll 1$. Damit vereinfacht sich Gl. (1.11) zu:

$$\kappa = -w'' \tag{1.12}$$

1.3.2.2 Stoffgesetz

Wir setzen linear-elastisches Werkstoffverhalten, also die Gültigkeit des *Hookeschen Gesetzes* voraus. Der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung ist damit:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \text{ bzw. } \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Ersetzen wir in Gl. (1.9) die Dehnung durch die Spannung, dann ergibt sich:

$$\varepsilon_M(z) = \frac{\sigma_M(z)}{E} = \frac{z}{\rho} \text{ bzw. } \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_M(z)}{Ez}$$

Der Index *M bei* ε_M bedeutet, dass die Dehnung durch das Moment verursacht wird.

Im Hauptachsensystem gilt:

$$\sigma_M(z) = \frac{M \cdot z}{I}$$

Daraus folgt für die Krümmung:

$$\kappa_M = \frac{M}{EI} \text{ bzw. } M = EI \cdot \kappa_M \tag{1.13}$$

Das Biegemoment ist der Krümmung der Biegelinie proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist die Biegesteifigkeit *EI*.

Ein zusätzlicher Krümmungsanteil wird von einer Temperaturdifferenz ΔT zwischen unterer und oberer Balkenseite erzeugt. Zur Erläuterung dieser Einwirkung betrachten wir den Temperaturverlauf in *Bild 1.10*, der in guter Näherung als linear angenommen werden kann. Dieser Verlauf wird in die dargestellten beiden Anteile zerlegt.

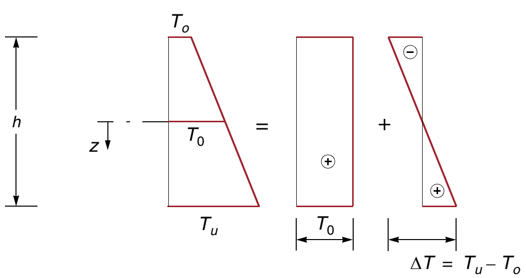

Bild 1.10 Aufteilung des linearen Temperaturverlaufs

Der konstante Anteil mit der Temperatur in Höhe der Schwerachse stellt eine gleichmäßige Temperaturbeanspruchung dar, die eine konstante Dehnung im gesamten Querschnitt bewirkt. Diese Einwirkung wurde bereits in Abschnitt 1.3.1 behandelt.

Der lineare Anteil ist in Höhe der Schwerachse gleich null und erzeugt einen linearen Dehnungsverlauf.

$$\varepsilon_T(z) = \alpha_T \cdot T(z) = \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \cdot z$$

Mit $\varepsilon_T(z) = \frac{z}{\rho} = \kappa_T \cdot z$ folgt:

$$\kappa_T = \frac{\varepsilon_T(z)}{z} = \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h}$$

Die gesamte Krümmung ist die Summe beider Anteile:

$$\kappa = \kappa_M + \kappa_T = \frac{M}{EI} + \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \qquad (1.14)$$

1.3.2.3 Verträglichkeit

Die Krümmung aus der kinematischen Beziehung in Gl. (1.12) muss der Krümmung aus dem Materialgesetz in Gl. (1.14) entsprechen. Daraus folgt die Differenzialgleichung zweiter Ordnung des Bernoullischen Balkens:

$$w'' = -\frac{M}{EI} - \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \qquad (1.15)$$

Unter Voraussetzung der Annahme infinitesimal kleiner Verformungen betrachten wir nochmals *Bild 1.8*. Für infinitesimal kleine Winkel gilt $\sin\varphi \approx \tan\varphi \approx \varphi$. Damit folgt aus der Neigungsänderung $d\varphi$ des Querschnitts die Verlängerung einer Querschnittsfaser an der Stelle *z* zu:

$$\Delta dx = d\varphi \cdot z$$

Die Dehnung ist damit:

$$\varepsilon(z) = \frac{d\varphi \cdot z}{dx} = \varphi' \cdot z$$

In linearisierter Form ($\tan\varphi \approx \varphi$) gilt:

$$\varphi = -w' \qquad (1.16)$$

Daraus folgt:

$$\varepsilon(z) = -w'' \cdot z$$

Unter Berücksichtigung von:

$$\varepsilon(z) = \frac{\sigma(z)}{E} + \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \cdot z = \frac{M}{EI} \cdot z + \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h} \cdot z$$

ergibt sich:

$w'' = -\frac{M}{EI} - \alpha_T \cdot \frac{\Delta T}{h}$, also wiederum Gl. (1.15).

Unter Berücksichtigung der linearisierten kinematischen Beziehungen ist in *Bild 1.8* die Länge der gekrümmten Biegelinie ungefähr gleich der differenziellen Abmessung dx. Damit gilt für die Winkeländerung $d\varphi$ näherungsweise:

$$d\varphi \approx \frac{dx}{\rho} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \varphi' \approx \frac{1}{\rho} = \kappa \qquad (1.17)$$

Mit $w' \approx -\varphi$ folgt $w'' \approx -\varphi' \approx -\kappa$

1.3.2.4 Gleichgewicht

Der differenzielle Zusammenhang zwischen der Belastung senkrecht zur Stabachse und den Schnittgrößen ergab sich in Baustatik 1 mit zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung:

$$V' = -q \qquad M' = V - m \tag{1.18}$$

bzw. mit einer Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$M'' = -q - m' \tag{1.19}$$

Daraus folgt die Differenzialgleichung 4. Ordnung des Bernoulli-Balkens:

$$w'''' = \left(-\frac{M}{EI} - \alpha_T \frac{\Delta T}{h}\right)''$$

$$w'''' = -\frac{M''}{EI} = \frac{q + m'}{EI}$$, für konstantes EI, bzw.:

$$EIw'''' = q + m' \tag{1.20}$$

1.3.3 Formänderungen infolge von Querkraft

Die Schubspannung infolge von Querkraft ergibt sich im Hauptachsensystem aus der folgenden Beziehung:

$$\tau = \frac{V \cdot S}{I \cdot b} \text{ bzw. } T = \frac{V \cdot S}{I} \tag{1.21}$$

Diese Beziehung folgt aus einer Gleichgewichtsbetrachtung aufgrund der Änderung der Normalspannungen in Richtung der Achse des Balkens und wurde in der Festigkeitslehre hergeleitet.

Für linear-elastisches Werkstoffverhalten gilt das Hookesche Gesetz für den Zusammenhang zwischen der Schubspannung τ und der Gleitung γ:

$$\tau = G \cdot \gamma \text{ bzw. } \gamma = \frac{\tau}{G}$$

Der Schubmodul G ist mit dem Elastizitätsmodul E durch folgende Beziehung verknüpft:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \tag{1.22}$$

Wir betrachten einen infinitesimal kleinen Balkenabschnitt der Länge dx. Der Schubfluss T bzw. die Schubspannung τ ist parabolisch über die Querschnittshöhe verteilt. In der Schwerachse ist die Schubspannung extremal und am oberen und unteren freien Rand ist die Schubspannung gleich null. Da die Schubverzerrung γ der Schubspannung proportional ist, ist der Winkel γ in der Schwerachse am größten, an den freien Rändern ist γ gleich null. Wir denken uns nun den infinitesimalen schmalen Streifen durch horizontale Schnitte in rechteckige Teile zerlegt. Das obere und untere Rechteck ist fast unverzerrt, an den freien Rändern ist der rechte Winkel erhalten. Die Rechtecke an der Schwerachse verzerren sich am meisten. Dazwischen ist die Schubverzerrung dem Verlauf der Schubspannung entsprechend abgestuft. Die Rechtecke müssen nach der Verformung wieder zusammen passen, da es sich um ein kontinuierlich zusammenhängendes Material handelt. Wie in *Bild 1.11* dargestellt ist, folgt aus dem lückenlosen Zusammensetzen der einzelnen Rechtecke eine S-förmige Verwölbung des Querschnitts. Diese Verwölbung verletzt die Bernoulli-Hypothese!

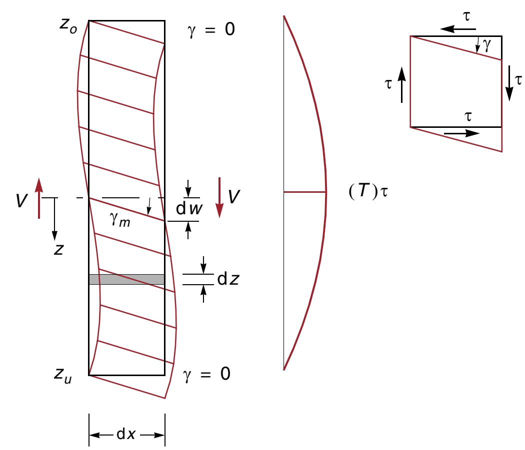

Bild 1.11 Querschnittsverformung infolge von Schubspannungen

Um die Schubverformungen als integrale Größe der Schwerachse zuzuordnen, betrachten wir die Äquivalenz der Arbeiten, die einerseits von den Schubspannungen auf den Verzerrungen über die Querschnittshöhe geleistet wird, andererseits die Arbeit, die vom Integral der Schubspannungen über die Querschnittsfläche, also der

Querkraft auf der Schubverformung der Schwerachse geleistet wird.

Die Äquivalenz der Arbeiten der Querkraft V auf dw und der Schubflussresultierenden $T \cdot dz$ auf $\gamma \cdot dx$ ergibt:

$$V \cdot dw = \int T \cdot dz \cdot \gamma \cdot dx$$

Wir dividieren beide Seiten der Gleichung durch dx und ersetzen den Schubfluss nach Gl. (1.21) durch die erzeugende Querkraft.

$$V \cdot \frac{dw}{dx} = \int T \cdot \underbrace{\frac{T}{b \cdot G}}_{\gamma} \cdot dz = \int \frac{V^2 \cdot S^2}{b \cdot G \cdot I^2} dz$$

Nach Division der Gleichung durch V und Erweiterung der rechten Seite mit der Querschnittsfläche A folgt:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{V}{A \cdot G} \cdot \underbrace{A \int \frac{S^2}{b \cdot I^2} dz}_{\kappa_V} \tag{1.23}$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{dw}{dx} = w' = \gamma_m = \kappa_V \cdot \frac{V}{A \cdot G} \tag{1.24}$$

Wie aus *Bild 1.11* deutlich wird, ist $\frac{dw}{dx} = w'$ der mittlere Winkel der Schubverzerrung γ_m.

In *Bild 1.11* wurde vorausgesetzt, dass der Querschnitt sich nicht verdreht. Um den Zusammenhang zwischen der Ableitung der Biegelinie w', dem Schubwinkel γ und der Querschnittsdrehung φ zu erhalten, betrachten wir das differenzielle Element in *Bild 1.12*. Links ist das Element analog zu *Bild 1.11* dargestellt. Die Schubverzerrung ist darin mit dem Mittelwert γ_m als konstant über die Balkenhöhe angenommen. Wird nun das Balkenelement um einen Winkel φ gegen die Horizontale gedreht, wie rechts in *Bild 1.12* dargestellt ist, so reduziert sich die Ableitung w' um diesen Winkel. Der Winkel φ stellt die Neigung des Querschnitts dar. Damit folgt:

$$w' = \gamma - \varphi$$

Damit wird aus Gl. (1.24):

$$w' = \gamma_m - \varphi = \kappa_V \cdot \frac{V}{A \cdot G} - \varphi \tag{1.25}$$

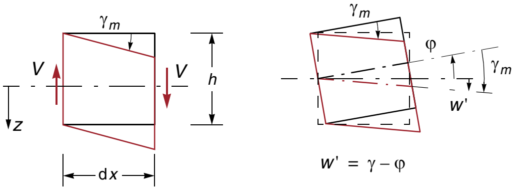

Bild 1.12 Schubverzerrtes Element mit Querschnittsdrehung

Einfache Ableitung von Gl. (1.25) ergibt:

$$w'' = \gamma'_m - \varphi' = \gamma'_m - \kappa \tag{1.26}$$

φ' ist in linearisierter Form nach Gl. (1.17) die Krümmung des Balkens.

Unter Berücksichtigung von Biege- **und** Schubverformungen folgt aus Gl. (1.26) nach Ersetzen der Krümmung durch die Beziehung Gl. (1.14) und Ersetzen der Schubverzerrung durch die Querkraft nach Gl. (1.24):

$$w'' = -\frac{M}{EI} - \alpha_T \frac{\Delta T}{h} + \kappa_V \frac{V'}{AG} \tag{1.27}$$

κ_V ist ein querschnittsabhängiger Beiwert:

$$\kappa_V = A \int \frac{S^2}{b \cdot I^2} dz = \frac{A}{I^2} \int \frac{S^2}{b} dz \tag{1.28}$$

Das Trägheitsmoment I ist nicht von z abhängig und kann daher vor das Integral geschrieben werden.

Wir zeigen die Berechnung des Beiwerts κ_V für den Rechteckquerschnitt in *Bild 1.13*. Da die Breite des Querschnitts konstant ist, ist nur das statische Moment S eine Funktion der Koordinate z. Die Querschnittsfläche und das Trägheitsmoment betragen:

$$A = b \cdot h$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

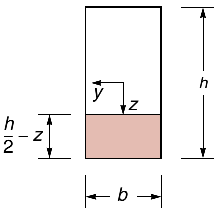

Bild 1.13 Rechteckquerschnitt

Wir berechnen zunächst das statische Moment als Funktion von z:

$$S(z) = \left(\frac{h}{2} - z\right) \cdot b \cdot \left[\frac{h}{2} - \left(\frac{h}{2} - z\right)/2\right]$$

$$= \left(\frac{bh}{2} - bz\right) \cdot \left(\frac{h}{4} + \frac{z}{2}\right) = \frac{bh^2}{8} - \frac{bz^2}{2}$$

Damit kann das Integral ausgewertet werden:

$$\int_{-h/2}^{h/2} S^2 \,\mathrm{d}z = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{bh^2}{8} - \frac{bz^2}{2}\right)^2 \mathrm{d}z$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{b^2h^4}{64} - \frac{b^2h^2z^2}{8} + \frac{b^2z^4}{4}\right) \mathrm{d}z$$

$$= \frac{b^2h^5}{64} - \frac{b^2h^5}{96} + \frac{b^2h^5}{320} = \frac{b^2h^5}{120}$$

$$\kappa_V = \frac{A}{b \cdot I^2} \int_{-h/2}^{h/2} S^2 dz = \frac{bh}{b\left(\frac{bh^3}{12}\right)^2} \frac{b^2h^5}{120} = 1{,}2$$

Für einen Vollkreisquerschnitt erhält man analog: $\kappa_V \approx 1{,}185$

Für Doppel-T-Profile gilt näherungsweise: $\kappa_V \approx \frac{A}{A_{\text{Steg}}}$

Die Differenzialgleichungen des Balkens sind in *Tabelle 1.2* zusammengestellt. Anteile aus Schubverformungen sind grau gekennzeichnet.

Tabelle 1.2 Differenzialgleichungen des Balkens

Differenzial-gleichung	Gleichgewicht	Stoffgesetz	Kinematik
1. Ordnung	$V' = -q$ $M' = V - m$	$\varphi' = \frac{M}{EI} + \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$ $\gamma = \kappa_V \frac{V}{AG}$	$w' = \gamma - \varphi$
2. Ordnung	$M'' = -q - m'$	$\kappa = \frac{M}{EI} + \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$ $\gamma' = \kappa_V \frac{V'}{AG}$	$\kappa = -w'' + \gamma'$
		$w'' = -\frac{M}{EI} - \alpha_T \frac{\Delta T}{h} + \kappa_V \frac{V'}{AG}$	
4. Ordnung	$EIw'''' = q + m' - \kappa_V \frac{EI}{AG} q''$		

Beispiel 1.3

Für den in *Bild 1.14* dargestellten Kragträger ist der Durchbiegungsverlauf $w(x)$ infolge der konstanten Streckenlast zu ermitteln.

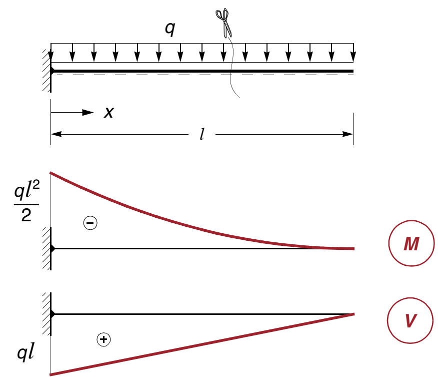

Bild 1.14 Zustandslinien des Kragarms

Weil das System statisch bestimmt ist, kann die Momentenlinie aus Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Für die mathematische Behandlung wird der Funktionsverlauf benötigt. Er folgt aus der Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ am abgetrennten Teilsystem in *Bild 1.15:*

$$\sum M_{(i)} = 0: \quad -M(x) - q \cdot (l - x)^2/2 = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = -\frac{q}{2}(l - x)^2$$

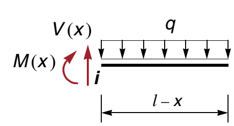

Bild 1.15 Abgetrenntes Teilsystem

Mit dem bekannten Momentenverlauf kann die Differenzialgleichung 2. Ordnung direkt integriert werden.

$$w'' = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{q}{2EI}(l - x)^2 = \frac{q}{2EI}(l^2 - 2lx + x^2)$$

$$w' = \int w'' \mathrm{d}x = \frac{q}{2EI}\left(l^2x - lx^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + c_1$$

$$w = \int w' \mathrm{d}x = \frac{q}{2EI}\left(\frac{1}{2}l^2x^2 - \frac{1}{3}lx^3 + \frac{1}{12}x^4\right) + c_1x + c_2$$

Sachwortverzeichnis