

1 Berechnung von Stabtragwerken nach Theorie II. Ordnung

1.1 Einführung

Jedes Tragwerk verformt sich infolge seiner Belastung. Wir sind in **Baustatik 1** und **Baustatik 2** davon ausgegangen, dass die Verformungen bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen vernachlässigt werden können. Man nennt dies eine Berechnung nach *Theorie I. Ordnung*.

Bei vielen Problemstellungen der Baustatik ist diese Annahme jedoch nicht gerechtfertigt. Selbst wenn die Verformungen des Tragwerks im Verhältnis zu seinen Abmessungen sehr klein sind, muss bei großen Druck- oder Zugkräften der Einfluss der Verformungen auf das Gleichgewicht berücksichtigt werden.

Diese Berücksichtigung der Verformungen bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen wird als *Theorie II. Ordnung* bezeichnet. Zusammengefasst ergibt sich die folgende Unterscheidung:

- Theorie I. Ordnung: Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am **unverformten** System.
- Theorie II. Ordnung: Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am **verformten** System.

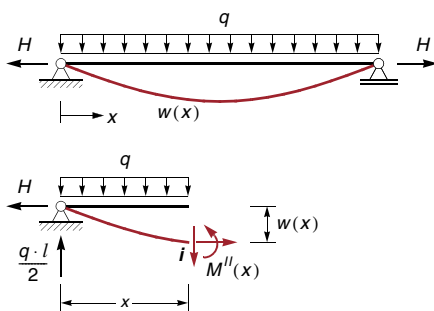


Bild 1.1 Balken mit Längskraft unter Querbelastung

Der Balken in *Bild 1.1* wird durch eine konstante Streckenlast sowie eine Horizontalkraft beansprucht. Für die Berechnung des Biegemomentes an einer beliebigen Stelle x bilden wir die Momentensumme bezüglich des

Punktes i . Aufgrund der Durchbiegung des Balkens hat die horizontale Auflagerkraft den Abstand $w(x)$ zur Balkenachse und geht mit in die Momentensumme ein. Damit folgt:

$$M''(x) = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} - H \cdot w(x)$$

$$M''(x) = M_q'' - H \cdot w(x) \quad (1.1)$$

Der Anteil am Biegemoment ohne den Einfluss der Horizontalkraft ist in vorheriger Gleichung mit M_q'' bezeichnet.

Die Theorie II. Ordnung berücksichtigt zwar die Verformungen bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen, ist aber eine **geometrisch lineare** Theorie, da wir weiterhin die Linearisierung der kinematischen (geometrischen) Beziehung beibehalten, also von kleinen Verformungen ausgehen.

Die exakte Beziehung zwischen Krümmung des Balkens und der 2. Ableitung der Biegelinie lautet:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{-w''}{(1 + w'^2)^{3/2}}$$

Für kleine Verformungen ist $w'^2 \ll 1$ und kann gegenüber eins vernachlässigt werden. Es gilt also weiterhin die lineare Beziehung $\kappa = -w''$.

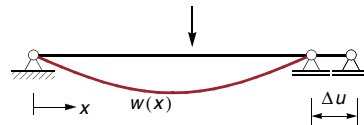


Bild 1.2 Berücksichtigung der horizontalen Auflagerverschiebung bei Theorie III. Ordnung

Bild 1.2 zeigt einen unter der Wirkung einer Kraft verformten Balken. Da die Balkenachse nicht gedehnt wird, also nicht länger wird, muss sich das rechte Auflager nach links verschieben. Dieser Effekt lässt sich nur durch eine geometrisch nichtlineare Theorie erfassen. Man spricht von einer Theorie III. Ordnung. Für kleine Verfor-

mungen ist die Verschiebung Δu gegenüber der Durchbiegung w vernachlässigbar klein.

Entsprechendes gilt für das Beispiel in *Bild 1.3*. Der Balken ist an beiden Enden horizontal gehalten, sodass infolge der Balkendurchbiegung eigentlich horizontale Auflagerkräfte entstehen, die nur durch Theorie III. Ordnung erfasst werden können.

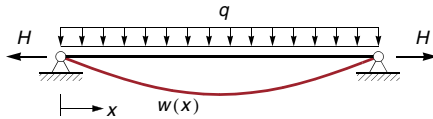


Bild 1.3 Berücksichtigung der Membranwirkung bei Theorie III. Ordnung

1.2 Differenzialgleichung der Theorie II. Ordnung

Wir gehen zunächst von Gl. (1.1) aus und bilden die zweifache Ableitung nach x . Unter der Voraussetzung, dass H konstant ist, folgt:

$$M = M^I(q) - H \cdot w(x)$$

$$M'' = (M^I)'' - H \cdot w''(x) \quad (1.2)$$

Auf den hochgestellten Index // wird verzichtet, unter M ist also das Moment nach Theorie II. Ordnung zu verstehen. Für den Zusammenhang zwischen Moment und Biegelinie gilt unverändert die Beziehung:

$$EIw'' = -M \quad (1.3)$$

da der Einfluss der Theorie II. Ordnung nur in die Gleichgewichtsbedingungen eingeht. Durch zweimaliges Ableiten von Gl. (1.3) und Einsetzen von Gl. (1.2) folgt:

$$(EIw'')'' = -M'' = -(M^I)'' + H \cdot w''(x)$$

Mit der Beziehung

$$(M^I)'' = -q$$

folgt die Differenzialgleichung 4. Ordnung:

$$(EIw'')'' = q + H \cdot w'' \text{ bzw. } (EIw'')'' - H \cdot w'' = q$$

Herleitung am differenziellen Element

Zur Herleitung der Differenzialgleichungen am differenziellen Element betrachten wir das infinitesimale Balken-

element der Länge dx in *Bild 1.4*. Die Zerlegung der resultierenden Schnittkraft erfolgt dabei bezüglich der unverformten Balkenachse.

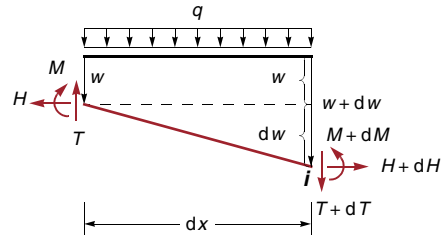


Bild 1.4 Differenzielles Element mit Verformung

$$\sum V = 0: -T(x) + T(x) + dT + q(x)dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dx} = T' = -q(x)$$

$$\sum M_{(i)} = 0: -M(x) + M(x) + dM - T(x)dx + H(x)dw - q(x)dx \frac{dx}{2} = 0$$

Unter Vernachlässigung der Produkte differenzieller Größen als von „höherer Ordnung klein“ folgt:

$$dM - T(x)dx + H(x)dw = 0$$

$$\frac{dM}{dx} - T(x) + H(x) \frac{dw}{dx} = 0$$

$$M' = T - Hw' \quad (1.4)$$

$$M'' = T' - (Hw')' \quad (1.5)$$

mit $EIw'' = -M$ bzw. $(EIw'')'' = -M''$ folgt:

$$(EIw'')'' = -T' + (Hw')'$$

mit $T' = -q$ ergibt sich die Differenzialgleichung 4. Ordnung:

$$(EIw'')'' - (Hw')' = q \quad (1.6)$$

Aus Gl. (1.4) folgt:

$$T = M' + Hw' = -EIw'''' + Hw' \quad (1.7)$$

Der Zusammenhang zwischen den Schnittkräften N und V bezüglich der verformten Achse und den Schnittkräften H und T bezüglich der unverformten Achse ist in *Bild 1.5* abzulesen.

$$V = T \cdot \cos \varphi + H \cdot \sin \varphi$$

$$N = -T \cdot \sin \varphi + H \cdot \cos \varphi$$

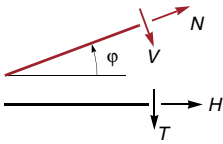


Bild 1.5 Zerlegung der Schnittkräfte

Für kleine Verformungen gilt: $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$. Damit ergibt sich in linearisierter Form:

$$V = T + H \cdot \varphi$$

$$N = -T \cdot \varphi + H$$

Mit der Beziehung $\varphi = -w'$ folgt:

$$V = T - H \cdot w'$$

$$N = T \cdot w' + H \tag{1.8}$$

Da wir kleine Verformungen voraussetzen, ist die Verdrehung $w' = -\varphi$ sehr klein und das Produkt $T \cdot w'$ ist vernachlässigbar, wenn die Horizontalkraft H viel größer ist als die Transversalkraft. Dann gilt näherungsweise:

$$N \approx H \tag{1.9}$$

Aus Gl. (1.4) folgt:

$$M' = T - Hw' = V = -EIw''$$

Die Differenzialgleichungen des Balkens nach Theorie II. Ordnung sind in *Tabelle 1.1* zusammengestellt.

Tabelle 1.1 Differenzialgleichungen des Balkens nach Theorie II. Ordnung

Differenzialgleichung	Gleichgewicht	Stoffgesetz	Kinematik
1. Ordnung	$T' = -q$ $M' = T - Hw'$	$\varphi' = \frac{M}{EI} + \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$	$w' = \gamma - \varphi$
2. Ordnung	$M'' = -q - (Hw'')$	$\kappa = \frac{M}{EI} + \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$ $w'' = -\frac{M}{EI} - \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$	$\kappa = -w''$
4. Ordnung	$(EIw''')' - (Hw'')' = q$		

Die Änderung gegenüber Theorie I. Ordnung betrifft nur die Spalte des Gleichgewichts.

Lösung der Differenzialgleichung

Wir gehen davon aus, dass die Biegesteifigkeit EI und die Horizontalkraft H bereichsweise konstant sind. Damit folgt die Differenzialgleichung:

$$EIw'''' - Hw'' = q$$

Dies ist eine lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Allgemein ergibt sich die Lösung aus der Summe von homogener Lösung w_h und Partikularlösung w_p :

$$w = w_h + w_p$$

• Homogene Lösung

Die homogene Differenzialgleichung lautet:

$$EIw'''' - Hw'' = 0 \tag{1.10}$$

Mit dem Ansatz:

$$w = c \cdot e^{\lambda x}$$

$$w'' = \lambda^2 \cdot c \cdot e^{\lambda x}$$

$$w'''' = \lambda^4 \cdot c \cdot e^{\lambda x}$$

folgt durch Einsetzen in Gl. (1.10):

$$EI \cdot \lambda^4 \cdot c \cdot e^{\lambda x} - H \cdot \lambda^2 \cdot c \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$(EI \cdot \lambda^4 - H \cdot \lambda^2) \cdot c \cdot e^{\lambda x} = 0$$

Da $c \cdot e^{\lambda x}$ ungleich null ist, folgt nach Division der Gleichung durch EI die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^4 - \mu^2 \lambda^2 = 0 \text{ mit } \mu^2 = \frac{H}{EI}$$

Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind:

$$\lambda_{1,2} = 0$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\mu^2}$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $H > 0$ (Zug)

$$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm \mu \text{ mit } \mu = \sqrt{\frac{H}{EI}}$$

$$w_h = c_1 + c_2 x + \tilde{c}_3 e^{\mu x} + \tilde{c}_4 e^{-\mu x}$$

Die Terme c_1 und $c_2 x$ folgen aus der doppelten Nullstelle $\lambda_{1,2} = 0$.

Mit den Beziehungen:

$$e^{\mu x} = \cosh \mu x + \sinh \mu x$$

$$e^{-\mu x} = \cosh \mu x - \sinh \mu x$$

ergibt sich:

$$w_h = c_1 + c_2 x + \bar{c}_3 (\cosh \mu x + \sinh \mu x) + \bar{c}_4 (\cosh \mu x - \sinh \mu x)$$

$$w_h = c_1 + c_2 x + (\bar{c}_3 + \bar{c}_4) \cosh \mu x + (\bar{c}_3 - \bar{c}_4) \sinh \mu x$$

Die Integrationskonstanten werden umbenannt:

$$c_3 = \bar{c}_3 + \bar{c}_4$$

$$c_4 = \bar{c}_3 - \bar{c}_4$$

Damit folgt:

$$w_h = c_1 + c_2 x + c_3 \cosh \mu x + c_4 \sinh \mu x$$

2. $H < 0$ (Druck)

$$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm i\mu \quad \text{mit } \mu = \sqrt{\frac{|H|}{EI}}$$

$$w_h = c_1 + c_2 x + \bar{c}_3 e^{i\mu x} + \bar{c}_4 e^{-i\mu x}$$

Nach Euler/Moivre gilt:

$$e^{i\mu x} = \cos \mu x + i \sin \mu x$$

$$e^{-i\mu x} = \cos \mu x - i \sin \mu x$$

Durch Einsetzen und Umbenennen der Integrationskonstanten folgt:

$$w_h = c_1 + c_2 x + c_3 \cos \mu x + c_4 \sin \mu x \quad (1.11)$$

• Partikularlösung

Für eine konstante Streckenlast folgt die Partikularlösung aus dem Ansatz:

$$w_p = c_5 x^2$$

Einsetzen in die Differenzialgleichung (1.6) ergibt:

$$-H \cdot c_5 \cdot 2 = q \Rightarrow c_5 = -\frac{q}{2H}$$

Damit lautet die Partikularlösung:

$$w_p = -\frac{q}{2H} x^2$$

Für weitere Belastungen kann die Partikularlösung durch Variation der Konstanten ermittelt werden.

Für den Fall einer Druckkraft ($H < 0$) ergibt sich die Gesamtlösung $w = w_h + w_p$ zu:

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 \cos \mu x + c_4 \sin \mu x - \frac{q}{2H} x^2 \quad (1.12)$$

Für eine Zugkraft gilt entsprechend:

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 \cosh \mu x + c_4 \sinh \mu x - \frac{q}{2H} x^2 \quad (1.13)$$

Die Integrationskonstanten werden durch Anpassen der Gesamtlösung an die Randbedingungen der jeweiligen Problemstellung ermittelt, wie in den nachfolgenden Beispielen gezeigt wird.

Beispiel 1.1

Für den in *Bild 1.6* dargestellten Balken sind die Zustandsgrößen nach Theorie II. Ordnung durch Lösung der Differenzialgleichung zu ermitteln.

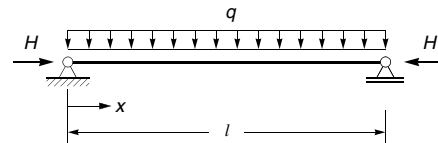


Bild 1.6 System mit Randbedingungen

Aufgrund der beidseitig gelenkigen Lagerung des Balkens sind am Anfangs- und Endpunkt des Balkens die Durchbiegung und das Moment gleich null. Die vier Integrationskonstanten in Gl. (1.12) sind so zu bestimmen, dass diese Randbedingungen erfüllt sind. Die vier Randbedingungen für das vorliegende Problem lauten:

1. $w(0) = 0$

2. $M(0) = 0$

3. $w(l) = 0$

4. $M(l) = 0$

Es ergeben sich vier Gleichungen für vier Unbekannte. Die Randbedingungen für das Moment werden mit der Beziehung $E/w'' = -M$ durch die 2. Ableitung der Biegelinie ausgedrückt. Sie ergibt sich zu:

$$w' = c_2 - c_3 \mu \sin \mu x + c_4 \mu \cos \mu x - \frac{q}{H} x$$

$$w'' = -c_3 \mu^2 \cos \mu x - c_4 \mu^2 \sin \mu x - \frac{q}{H}$$

Damit lauten die vier Randbedingungen:

$$w(0) = c_1 + c_3 = 0$$

$$w''(0) = -c_3\mu^2 - \frac{q}{H} = 0$$

$$w(l) = c_1 + c_2l + c_3\cos\mu l + c_4\sin\mu l - \frac{q}{2H}l^2 = 0$$

$$w''(l) = -c_3\mu^2\cos\mu l - c_4\mu^2\sin\mu l - \frac{q}{H} = 0$$

In Matrixdarstellung lautet das Gleichungssystem zur Bestimmung der Integrationskonstanten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 & 0 \\ 1 & l & \cos\mu l & \sin\mu l \\ 0 & 0 & -\mu^2\cos\mu l & -\mu^2\sin\mu l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{q}{2H} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ l^2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Mit der Lösung:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{q}{\mu^2 H} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{2}\mu^2 \\ -1 \\ \frac{\cos\mu l - 1}{\sin\mu l} \end{bmatrix}$$

Mit der Beziehung:

$$\frac{\cos\mu l - 1}{\sin\mu l} = -\tan\mu \frac{l}{2}$$

folgt:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{q}{\mu^2 H} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{2}\mu^2 \\ -1 \\ -\tan\mu \frac{l}{2} \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich für die Biegelinie und ihre Ableitungen:

$$w(x) = \frac{q}{\mu^2 H} \left(1 + \frac{l}{2}\mu^2 x - \cos\mu x - \tan\mu \frac{l}{2} \sin\mu x - \frac{\mu^2}{2} x^2 \right)$$

$$w'(x) = \frac{q}{\mu^2 H} \left(\frac{l}{2}\mu^2 + \mu \sin\mu x - \mu \tan\mu \frac{l}{2} \cos\mu x - \mu^2 x \right)$$

$$w''(x) = \frac{q}{H} \left(\cos\mu x + \tan\mu \frac{l}{2} \sin\mu x - 1 \right)$$

$$w'''(x) = \frac{q}{H} \left(-\mu \sin\mu x + \mu \tan\mu \frac{l}{2} \cos\mu x \right)$$

$$M(x) = -EIw'' = -EI \frac{q}{H} \left(\cos\mu x + \tan\mu \frac{l}{2} \sin\mu x - 1 \right)$$

$$M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = -EI \frac{q}{H} \left(\cos\mu \frac{l}{2} + \tan\mu \frac{l}{2} \sin\mu \frac{l}{2} - 1 \right)$$

$$= -EI \frac{q}{H} \left(\frac{\cos^2\mu \frac{l}{2} + \sin^2\mu \frac{l}{2}}{\cos\mu \frac{l}{2}} - 1 \right)$$

$$M_{\max} = EI \frac{q}{H} \left(1 - \frac{1}{\cos\mu \frac{l}{2}} \right) \quad (1.15)$$

Aus Gl. (1.15) ist zu erkennen, dass der Betrag des maximalen Momentes unendlich groß wird, wenn der Nenner des Bruchs in der Klammer gleich null ist. Damit folgt:

$$\cos\mu \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow \mu \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \mu = \sqrt{\frac{H}{EI}} = \frac{\pi}{l} \Rightarrow H = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Dies ist die aus der Festigkeitslehre bekannte *Eulersche Knicklast* für den beidseitig gelenkig gelagerten Balken. Im Falle einer Zugkraft erhält man analog:

$$M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = EI \frac{q}{H} \left(1 - \frac{1}{\cosh\mu \frac{l}{2}} \right)$$

In diesem Fall ist M_{\max} immer endlich, da gilt:

$$\frac{1}{\cosh\mu \frac{l}{2}} \leq 1$$

Wie aus Gl. (1.15) deutlich wird, ist bei einer konstanten Horizontalkraft das Moment proportional zur Streckenlast q , es besteht also ein linearer Zusammenhang.

Bei einer *gleichzeitigen* Steigerung von q und H ergibt sich jedoch ein nichtlinearer Zusammenhang, da H durch den Parameter μ als Argument in die Kosinusfunktion eingeht.

1.3 Spannungs- und Stabilitätsproblem

Ist bei einem Tragwerk eine Einwirkung vorhanden, die schon bei geringer Intensität eine Verformung erzeugt, so wird diese Verformung durch den Einfluss einer vorhandenen Druckkraft vergrößert. Dieser Fall wird als *Spannungsproblem* bezeichnet. Fehlt eine solche Einwirkung, so liegt ein *Stabilitätsproblem* vor. Die beiden Fälle sind in *Bild 1.7* am Beispiel eines Einfeldbalkens dargestellt.

Links im Bild ist der Balken durch eine Einzelkraft quer zur Balkenachse beansprucht. Diese Einzelkraft erzeugt von Anfang an eine Durchbiegung, die infolge der Druckkraft H vergrößert wird. Es liegt ein Spannungsproblem vor.

Rechts im Bild ist zunächst eine reine Normalkraftbeanspruchung vorhanden, der Balken wird bei idealer Geometrie nicht gebogen. Wird nun die Druckkraft H gesteigert, so erfolgt ein plötzliches seitliches Ausweichen des Balkens, wenn die Kraft eine bestimmte Größe erreicht. Dieses Phänomen wird als Knicken bezeichnet, es liegt ein Stabilitätsproblem vor.

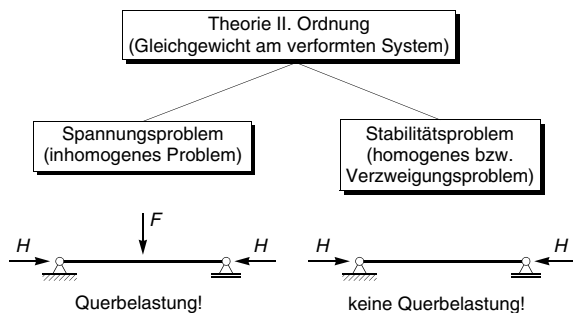


Bild 1.7 Spannungs- und Stabilitätsproblem

Mathematisch ist das Stabilitätsproblem dadurch charakterisiert, dass die Differenzialgleichung homogen ist.

Bild 1.8 zeigt den grundsätzlichen Verlauf des Last-Verformungsdiagramms für Druck- und Zugbeanspruchung. Dargestellt ist die Durchbiegung w der Kragarmspitze in Abhängigkeit des Faktors λ , mit dem sowohl die Horizontalkraft H , als auch die Vertikalkraft F gesteigert werden. Ist die Vertikalkraft F ungleich null, liegt ein

Spannungsproblem vor, und es ergeben sich die beiden gekrümmten Verläufe. Im Falle einer Druckkraft nehmen die Verformungen überproportional zu, im Fall einer Zugkraft ist die Verformungszunahme unterproportional.

Im Fall des Stabilitätsproblems ist keine Vertikalkraft vorhanden, und es entsteht zunächst keine Verformung w . Bei einer Steigerung der Horizontalkraft bis zur Größe der Knicklast versagt der Kragarm schlagartig, und es ist kein Gleichgewichtszustand möglich. Wie in *Bild 1.8* eingetragen ist, wird dieser Punkt als *Verzweigungspunkt* bezeichnet, da eine Verzweigung von einem stabilen zu einem instabilen Gleichgewichtszustand erfolgt. Die Last-Verformungskurve für das Spannungsproblem bei einer Druckkraft nähert sich asymptotisch der Knicklast, während bei einer Zugkraft keine Grenzlast existiert. Beide Kurven haben im Ursprung die Steigung der Geraden nach Theorie I. Ordnung.

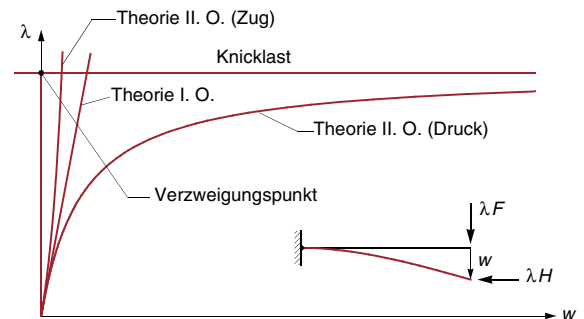


Bild 1.8 Last-Verformungsdiagramm für Theorie I. und II. Ordnung

Die mechanische Bedeutung der Steigung ist die einer Steifigkeit. Eine Steifigkeit ist die Kraftgröße, die sich infolge einer Verformung der Größe eins ergibt. Da der auf der Ordinate aufgetragene Wert γ die Größe der Kraft darstellt, hat demnach die Ableitung $d\gamma/dw$ die Bedeutung einer Steifigkeit. Daraus folgt, dass eine Druckkraft das System weicher macht, eine Zugkraft hingegen versteifend wirkt.

Wie wir bereits in *Beispiel 1.1* gesehen haben, besteht bei einer *gleichzeitigen* Steigerung von Querlast und Horizontalkraft ein nichtlinearer Zusammenhang, sodass das Superpositionsprinzip nicht mehr gilt. Dies hat zur

Folge, dass eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung für jede Lastkombination durchzuführen ist!

In *Beispiel 1.1* hatten wir aus der Lösung für M_{\max} in Gl. (1.15) gesehen, dass das Moment unendlich groß wird, wenn der Wert μ eine bestimmte Größe hat. Wir betrachten nun dieses Beispiel nochmals unter dem Aspekt des Stabilitätsproblems.

In diesem Fall ist keine Streckenlast vorhanden, die Differenzialgleichung ist also homogen. Das Gleichungssystem (1.14) zur Bestimmung der Integrationskonstanten lautet daher:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 & 0 \\ 1 & l & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 0 & -\mu^2 \cos \mu l & -\mu^2 \sin \mu l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da wir voraussetzen, dass die Druckkraft ungleich null ist, kann die zweite und vierte Zeile des homogenen Gleichungssystems durch $-\mu^2$ dividiert werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & l & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 0 & \cos \mu l & \sin \mu l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$\mathbf{Ac} = \mathbf{0}$

Dies ist ein lineares, homogenes Gleichungssystem. Nichttriviale Lösungen existieren nur dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix gleich null ist.

Aus der Bedingung $\det \mathbf{A} = 0$ erhält man eine Gleichung für den Parameter μ . Die Lösungen dieser Gleichung sind die Eigenwerte des Problems.

Die Determinante ergibt sich z.B. durch Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & l & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 0 & \cos \mu l & \sin \mu l \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & \sin \mu l \\ 0 & 0 & \sin \mu l \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot \begin{vmatrix} l & \sin \mu l \\ 0 & \sin \mu l \end{vmatrix} = -l \sin \mu l \end{aligned}$$

$$\sin \mu l = 0 \rightarrow \mu l = n\pi \quad n = 1, 2, \dots$$

Es gibt also unendlich viele Eigenwerte, von denen allerdings nur der kleinste Eigenwert ($n = 1$) von Interesse ist, da daraus die kleinste kritische Knicklast folgt. Für $n = 1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mu l &= \pi \\ \sqrt{\frac{H}{EI}} l = \pi &\rightarrow H_{\text{krit}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \end{aligned}$$

Wir setzen nun die Lösung $\mu = n\frac{\pi}{l}$ in das Gleichungssystem (1.16) ein und erhalten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & l & \cos n\frac{\pi}{l}l & \sin n\frac{\pi}{l}l \\ 0 & 0 & \cos n\frac{\pi}{l}l & \sin n\frac{\pi}{l}l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da die vierte Spalte nur aus Nullen besteht, ist die Lösung unabhängig von der Unbekannten c_4 . Das Gleichungssystem ist für beliebige Werte c_4 erfüllt. Aus der zweiten bzw. vierten Zeile folgt sofort $c_3 = 0$. Damit verbleibt das folgende Gleichungssystem für die Unbekannten c_1 und c_2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich null ist, ist auch $c_1 = c_2 = 0$. Damit folgt für die homogene Lösung Gl. (1.11):

$$w = c_4 \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Diese Funktionen sind die Eigenformen oder mechanisch formuliert, die Knickfiguren des Systems. Die ersten vier dieser unendlich vielen Eigenformen sind in *Bild 1.9* dargestellt. Da die Konstante c_4 beliebig ist, ist die Knickfigur nur qualitativ bestimmt.

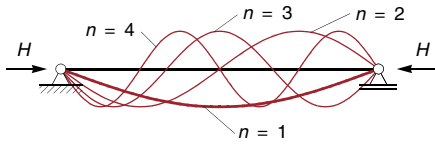


Bild 1.9 Eigenformen des beidseitig gelenkigen Balkens

Zur weiteren Verdeutlichung der Zusammenhänge betrachten wir nun den starren Stab in *Bild 1.10*, der im Punkt *a* drehelastisch gelagert ist. Dieser Stab hat einen Freiheitsgrad, nämlich den Drehwinkel φ . Die am rechten Rand angreifenden Kräfte enthalten den Faktor λ , mit dem beide Kräfte gleichzeitig gesteigert werden. Im verformten Zustand ergeben sich die angegebenen Abmessungen, wenn wir von beliebig großen Verformungen ausgehen.

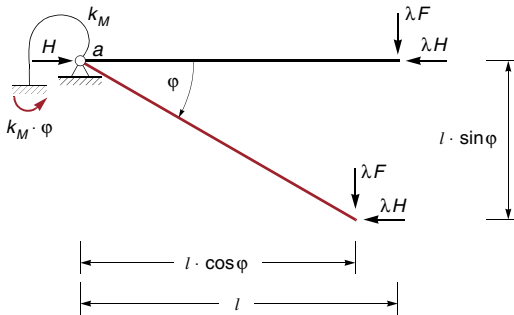


Bild 1.10 Drehelastisch gelagerter starrer Stab

Die Gleichgewichtsbedingung $\sum M_{(a)} = 0$ ergibt unter Berücksichtigung der Verformungen:

$$k_M \cdot \varphi - \lambda F \cdot l \cdot \cos \varphi - \lambda H \cdot l \cdot \sin \varphi = 0 \quad (1.17)$$

$$\lambda = \frac{k_M \cdot \varphi}{F \cdot l \cdot \cos \varphi + H \cdot l \cdot \sin \varphi}$$

Durch Einführen der Parameter:

$$\alpha = \frac{F}{H} \text{ und } \beta = \frac{k_M}{H \cdot l} \text{ folgt:}$$

$$\lambda(\varphi) = \frac{\beta \cdot H \cdot l \cdot \varphi}{\alpha \cdot H \cdot l \cdot \cos \varphi + H \cdot l \cdot \sin \varphi} = \frac{\beta \cdot \varphi}{\alpha \cdot \cos \varphi + \sin \varphi} \quad (1.18)$$

Werden kleine Verformungen vorausgesetzt, gilt:

$$\sin \varphi \approx \varphi \text{ und } \cos \varphi \approx 1$$

und Gl. (1.17) vereinfacht sich zu:

$$k_M \cdot \varphi - \lambda F \cdot l - \lambda H \cdot l \cdot \varphi = 0 \quad (1.19)$$

Entsprechend folgt aus Gl. (1.18)

$$\lambda(\varphi) = \frac{\beta \cdot \varphi}{\alpha + \varphi} \text{ bzw. } \varphi(\lambda) = \frac{\lambda \alpha}{\beta - \lambda} \quad (1.20)$$

Die Gleichungen (1.17) und (1.18) stellen Beziehungen nach Theorie III. Ordnung dar, da keine geometrische Linearisierung durchgeführt wurde. Die linearisierten Gleichungen (1.19) und (1.20) entsprechen der Theorie II. Ordnung.

Betrachten wir nun das Stabilitätsproblem. In diesem Fall ist die Kraft F bzw. α gleich null und aus Gl. (1.18) folgt:

$$\lambda = \frac{\beta \cdot \varphi}{\sin \varphi} \quad (1.21)$$

Aus Gl. (1.20) folgt für $\alpha = 0$:

$$\lambda(\varphi) = \frac{\beta \cdot \varphi}{\varphi} = \beta \quad (1.22)$$

Die Last-Verformungskurven für die vorherigen Beziehungen sind in *Bild 1.11* dargestellt. Die Drehfedersteifigkeit ist durch den Parameter $\beta = 20$ festgelegt. Für das Spannungsproblem sind zwei Kurven mit $\alpha = 0,1$ und $\alpha = 0,2$ eingetragen.

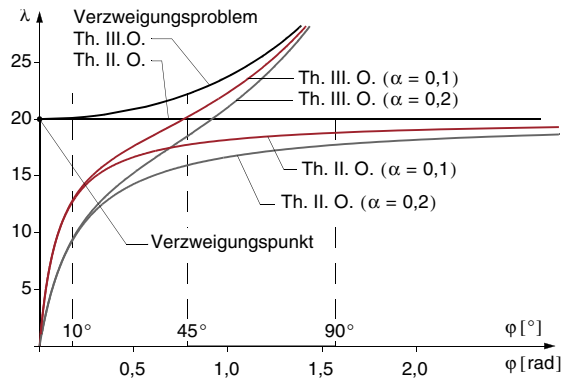


Bild 1.11 Theorie II. und III. Ordnung

Die gewählten Parameter entsprechen z. B. folgenden konkreten Zahlenwerten:

$$\begin{aligned} k_M &= 10000 \text{ kNm} & H &= 100 \text{ kN} \\ l &= 5 \text{ m} & F &= 10 \text{ kN} \quad (\alpha = 0,1) \\ & & F &= 20 \text{ kN} \quad (\alpha = 0,2) \end{aligned}$$

Wie in *Bild 1.11* erkennbar ist, sind die Unterschiede zwischen Theorie II. und III. Ordnung für kleine Werte von φ gering. Für einen Winkel von 10° folgt nach Theorie III. Ordnung aus Gl. (1.18) mit $\varphi = \frac{\pi}{180} 10 = 0,1745$:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\beta \cdot \varphi}{\alpha \cdot \cos \varphi + \sin \varphi} \\ &= \frac{20 \cdot 0,1745}{0,1 \cdot \cos 0,1745 + \sin 0,1745} = 12,827 \end{aligned}$$

Nach Theorie II. Ordnung aus Gl. (1.20):

$$\lambda = \frac{\beta \cdot \varphi}{\alpha + \varphi} = \frac{20 \cdot 0,1745}{0,1 + 0,1745} = 12,715$$

Dies entspricht einer Differenz von

$$\frac{12,827 - 12,715}{12,827} 100 = 0,876 \%$$

Obwohl bei einem Winkel von 10° die Auslenkung am rechten Stabende $0,87 \text{ m}$ beträgt, beträgt der Unterschied zwischen Theorie II. und III. Ordnung weniger als ein Prozent.

Erst bei größeren Verformungen sind signifikante Unterschiede sichtbar. Während sich die Kurven nach Theorie II. Ordnung asymptotisch der horizontalen Grenzlinie der Knicklast nähern, kann die Belastung bei Berücksichtigung der Theorie III. Ordnung noch erheblich gesteigert werden.

Ein grundsätzlicher Unterschied zwischen beiden Theorien ist auch beim Stabilitätsproblem erkennbar. Zwar ist in beiden Fällen derselbe Verzweigungspunkt vorhanden, jedoch existiert nach Theorie III. Ordnung bei Überschreiten dieses Punktes eine stabile Gleichgewichtslage mit einem definierten Verformungszustand.

Weiterhin wird in *Bild 1.11* der Einfluss des Parameters α sichtbar, der das Verhältnis von Querlast zu Horizontalkraft angibt. Je größer die Querlast ist, desto größer ist die anfängliche Verformung.

Beispiel 1.2

Für den in *Bild 1.12* dargestellten Kragträger sind die Zustandsgrößen nach Theorie II. Ordnung durch Lösung der Differentialgleichung zu ermitteln.

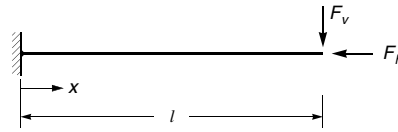


Bild 1.12 Kragträger mit Belastung

Da die angreifende Vertikalkraft am Ende des Balkens wirkt, ergibt sich die Lösung nur aus dem homogenen Anteil. Grundsätzlich gehen Einzelkräfte nur durch die Rand- oder Übergangsbedingungen in die Lösung ein. Die homogene Lösung Gl. (1.11) sowie die Ableitungen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} w &= c_1 + c_2 x + c_3 \cos \mu x + c_4 \sin \mu x \\ w' &= c_2 - c_3 \mu \sin \mu x + c_4 \mu \cos \mu x \\ w'' &= -c_3 \mu^2 \cos \mu x - c_4 \mu^2 \sin \mu x \\ w''' &= c_3 \mu^3 \sin \mu x - c_4 \mu^3 \cos \mu x \end{aligned} \quad (1.23)$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten erfolgt durch Anpassung der Lösung an die Randbedingungen. Die Randbedingungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten lauten für das vorliegende Problem:

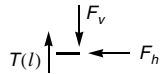
1. $w(0) = 0$
 $c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cos \mu \cdot 0 + c_4 \sin \mu \cdot 0 = c_1 + c_3 = 0$
2. $w'(0) = 0$
 $c_2 - c_3 \mu \sin \mu \cdot 0 + c_4 \mu \cos \mu \cdot 0 = c_2 + c_4 \mu = 0$
3. $M(l) = 0$, bzw. $w''(l) = 0$
 $-c_3 \mu^2 \cos \mu l - c_4 \mu^2 \sin \mu l = 0$

Da μ^2 ungleich null ist, kann die Gleichung durch $-\mu^2$ dividiert werden.

$$c_3 \cos \mu l + c_4 \sin \mu l = 0$$

4. $T(l) = F_v$

Diese Randbedingung ergibt sich nach *Bild 1.13* aus der Gleichgewichtsbedingung $\sum V = 0$ am Kragarmende.

**Bild 1.13** Freigeschnittenes Kragarmende

Mit Gl. (1.7) kann die Transversalkraft durch Ableitungen der Biegelinie ausgedrückt werden:

$$T(l) = -EIw''(l) + Hw'(l)$$

Mit $H = -F_h$ und $T(l) = F_v$ ergibt sich:

$$-EIw''(l) - F_h w'(l) = F_v$$

$$w''(l) + \frac{F_h}{EI} w'(l) = -\frac{F_v}{EI}$$

$$w''(l) + \mu^2 w'(l) = -\frac{F_v}{EI}$$

Durch Einsetzen des Ansatzes für w'' und w' folgt:

$$c_3 \mu^3 \sin \mu l - c_4 \mu^3 \cos \mu l$$

$$+ \mu^2 (c_2 - c_3 \mu \sin \mu l + c_4 \mu \cos \mu l) = -\frac{F_v}{EI}$$

und es verbleibt:

$$c_2 \mu^2 = -\frac{F_v}{EI}$$

Aus dieser Randbedingung ergibt sich durch die Transversalkraft ein Term ungleich null auf der rechten Seite der Gleichung, wodurch das Gleichungssystem nicht homogen ist.

Aus den vier Gleichungen folgt das Gleichungssystem zur Ermittlung der Integrationskonstanten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{F_v}{\mu^2 EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mit der Lösung:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{F_v}{\mu^3 EI} \begin{bmatrix} \tan \mu l \\ -\mu \\ -\tan \mu l \\ 1 \end{bmatrix}$$

Damit sind die Integrationskonstanten bekannt und die Funktion der Biegelinie und ihre Ableitungen ergeben sich zu:

$$w = \frac{F_v}{\mu^3 EI} (\tan \mu l - \mu x - \tan \mu l \cos \mu x + \sin \mu x)$$

$$w' = \frac{F_v}{\mu^2 EI} (-1 + \tan \mu l \sin \mu x + \cos \mu x)$$

$$w'' = \frac{F_v}{\mu EI} (\tan \mu l \cos \mu x - \sin \mu x) = -\frac{M}{EI}$$

$$w''' = \frac{F_v}{EI} (-\tan \mu l \sin \mu x - \cos \mu x) = -\frac{V}{EI}$$

Die Durchbiegung ist am freien Rand des Kragträgers maximal, sie folgt aus:

$$\begin{aligned} w_{\max} = w(l) &= \frac{F_v}{\alpha^3 EI} (\tan \mu l - \mu l - \tan \mu l \cos \mu l + \sin \mu l) \\ &= \frac{F_v}{\mu^3 EI} (\tan \mu l - \mu l) \end{aligned}$$

Das Moment an der Einspannung ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} M_{\max} = M(0) &= -EIw''(0) \\ &= -EI \frac{F_v}{\mu EI} (\tan \mu l \cos \mu 0 - \sin \mu 0) = -\frac{F_v}{\mu} (\tan \mu l) \end{aligned}$$

- Ermittlung der Knicklast

Die Knicklast folgt wiederum aus der Bedingung, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix zur Bestimmung der Integrationskonstanten gleich null sein muss.

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \mu \\ \cos \mu l & \sin \mu l \end{vmatrix} \\ &= \mu \cos \mu l \end{aligned}$$

$$\cos \mu l = 0 \rightarrow \mu l = n \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Die kritische Knicklast folgt aus:

$$\mu l = \frac{\pi}{2}$$

Sachwortverzeichnis

- A**
 Ablösen der Unbekannten 157
 Anfangswertproblem 146
 Ansatzfunktion 90
 Äquivalentes Kräftepaar 25
 Auflagerknoten 73
- B**
 Bettung 69
 Bettungszahl 54
 Bettungsziffer 54, 70
 Biegeformkoeffizienten 31
 Bisektionsverfahren 35
- C**
 Charakteristische Gleichung 11
- D**
 Deformationsmethode 59
 Dehnstarrheit 59
 Determinante 15
 Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung 166
 Diskretisierung 90
 Drehwinkelverfahren 30
- E**
 Eigenform 15, 23
 Eigenwert 15
 Elastisch gebetteter Balken 133
 Elastische Bettung 53
 Elastische Lagerung 67
 Elastischer Halbraum 54
 Elementmatrizen 68
 Elimination des Mittelknotens 128
 Ersatzimperfektion 23
 Ersatzkräftepaar 32, 33
 Eulersche Knicklast 13
 Exponentialfunktion 167
- F**
 Federkraft 68
 Federmoment 68
 Federsteifigkeit 67, 68
 Feldmatrix 144
 Formänderungsmethode 59
 Formfunktion 99
- G**
 Gauß-Integration 139
 Gauß-Quadratur 135, 137, 138, 139
 Gelenke 70
- Geometrische Imperfektion 22
 Geometrische Reihe 28
 Gesamtsteifigkeitsmatrix 66, 68
 Gleichgewichtsbedingungen 65, 66
 Gleichgewichtsbeziehungen 145
 Große Verformungen 16
 Grundelement 61
- H**
 Hermite-Polynom 99
 Homogene Lösung 11
- I**
 Instabiler Gleichgewichtszustand 14
 Integrationsintervall 136
 Integrationskonstante 12, 15
 Intervallhalbierung 35
 Inzidenzmatrix 65
 Iterative Annäherung der Biegelinie 26
- K**
 Kinematische Beziehungen 144
 Kleine Verformungen 16
 Knicken 14
 Knickfigur 15, 23
 Knicklast 14, 15, 130
 Knotenlasten 66
 Knotenlastvektor 65
 Kondensation 129
 Krümmung 9
- L**
 Lagrange-Polynom 124
 Lastvektor 66, 67
 Last-Verformungsdiagramm 14
 Last-Verformungskurve 14
 Leitmatrix 151
 Linearisierung 9
- M**
 Methode der Finiten Elemente 88
 Mitführen der Unbekannten 157
 Modifikation der Elementsteifigkeitsmatrix 71
- N**
 Nachgiebigkeiten 144
 Näherungsansatz 70
 Numerische Integration 135, 139
 Numerische Quadratur 135
- P**
 Partikularlösung 12
 Partitionierung 128
 Prinzip der virtuellen Kräfte 138
 Punktmatrix 150
- R**
 Randbedingung 66, 146
 Randmatrix 146
 Randwertproblem 146
 Reduktion des Gleichungssystems 66
 Reduktionsverfahren 143
 Reihenentwicklung 167
- S**
 Schiefstellung 23, 25
 Schnittgrößenermittlung 68
 Setzungsmulde 54
 Spannungsproblem 14
 Stabendschnittgrößen 60, 61, 62, 64, 65, 66
 Stabendverformungen 61, 62, 64
 Stabiler Gleichgewichtszustand 14
 Stabilitätsnachweis 23
 Stabilitätsproblem 14
 Stablasten 66
 Steifzifferverfahren 54
 Steifigkeit 14, 62, 145
 Steifigkeitsmatrix 60, 62, 64, 68, 70, 71
 Steifigkeitsmatrix nach Theorie II. Ordnung 69, 70
 Stützstelle 136
 Superpositionsprinzip 14
 Systemmatrix 68
- T**
 Theorie II. Ordnung 9, 69, 128, 163
 Theorie III. Ordnung 9
 Transformation 63, 64
 Transformationsmatrix 64
 Transversalkraft 11, 33
- U**
 Übertragungsmatrix 143
 Übertragungsverfahren 143, 148
- V**
 Veränderliche Biegesteifigkeit 139
 Verformungsbedingungen 65
 Verzweigungslast 34
 Verzweigungspunkt 14

Virtuelle Funktion 90
Vorkrümmung 23, 24
Vorverformungen 23

W
Weggrößenverfahren 59
Wichtungsfaktor 136

Z
Zeilen- und
Spaltenmodifizierung 67
Zustandsgrößen 144
Zwischenbedingung 66, 157