1 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Oft sind physikalische Größen nicht nur von einer, sondern mehreren Einflussgrößen abhängig. Beispielsweise wird das Volumen eines Quaders von drei Kantenlängen bestimmt. Die Verlängerung eines Stabes infolge einer Krafteinwirkung ist nach dem Gesetz von Hooke abhängig von dieser Kraft, der Länge des Stabes, seinem Querschnitt und seinem Elasizitätsmodul. Solche Abhängigkeiten werden durch Funktionen mehrerer Veränderlicher beschrieben. Funktionen zweier Veränderlicher können graphisch veranschaulicht werden. Der Begriff des Grenzwertes und der Stetigkeit wird erklärt. Partielle Ableitungen sind Grenzwerte der Differenzenquotienten bezüglich einer der Veränderlichen. Der Gradient wird zur Charakterisierung des Wachstums einer Funktion und zur Berechnung des totalen Differenzials benutzt. Damit ist z. B. die Bestimmung maximaler absoluter und relativer Messfehler bei Vorgabe der Toleranzen der Messgrößen möglich. Eine wichtige Rolle spielt die Ermittlung von Extremwerten von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Flächen- und Volumenintegrale sind i. Allg. Integrale von Funktionen mehrerer Veränderlicher, mit denen z. B. die Berechnung von Momenten bei inhomogener Dichteverteilung erfolgt.

Bezeichnungen

$\mathbb{R}^n$ — n-dimensionaler Vektorraum

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ — Vektor, Stelle

$X(x_1, x_2, ..., x_n)$ — zugehöriger Punkt

$\overrightarrow{OX} = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top$ — zugehöriger Ortsvektor

1.1 Der Begriff der Funktion mehrerer Veränderlicher

Die Veränderlichen, die eine physikalische Größe beeinflussen, werden in einem Vektor zusammengefasst. Der Definitionsbereich für Funktionen mehrerer Veränderlicher ist damit eine Teilmenge des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ oder der $\mathbb{R}^n$ selber. Jetzt kann der Funktionsbegriff als eindeutige Zuordnung aus dem $\mathbb{R}^n$ in die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erklärt werden. Die graphische Veranschaulichung ist für Funktionen zweier Veränderlicher durch eine Oberfläche im Raum möglich. Isolinienbilder dienen ebenfalls der Darstellung der Funktionswerte – ähnlich wie die Höhenlinien auf einer Landkarte.

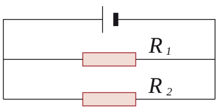

Bild 1.1 Parallele Widerstände

Definition 1.1

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Ist jeder Stelle $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top \in D$ durch eine Vorschrift f *eindeutig* eine Zahl $z = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$ zugeordnet, so heißt f **Funktion von n unabhängigen Veränderlichen** $x_1, x_2, ..., x_n$ auf dem Definitionsbereich $D_f = D$. Dabei ist z die **abhängige Veränderliche**.

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Beispiel 1.2

1. Sind zwei Widerstände R_1 und R_2 im Stromkreis parallel geschaltet (siehe **Bild 1.1**), so errechnet sich ihr Gesamtwiderstand R aus dem **Gesetz von Ohm**

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \text{zu} \qquad R = \frac{R_1\ R_2}{R_1 + R_2}.$$

R ist *abhängig* von den beiden Widerständen R_1 und R_2, also eine Funktion zweier Veränderlichen $R = R(R_1, R_2)$.

2. Die Gravitationskraft F zwischen zwei Körpern mit den Massen M und m berechnet sich nach dem **Gravitationsgesetz von Newton** zu

$$F = -\frac{\gamma\, m\, M}{|x|^2}\, \frac{x}{|x|},$$

wobei γ die Gravitationskonstante und $x = \overrightarrow{OX} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ der Ortsvektor des Schwerpunktes des Körpers mit der Masse m im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem mit dem Ursprung O im Schwerpunkt des Körpers mit der Masse M ist (siehe **Bild 1.2**). Die Kraft F ist ein dreidimensionaler Vektor, dessen Richtung durch den Einheitsvektor $-x/|x|$ gegeben ist und dessen Betrag $\gamma\, m\, M/|x|^2$ ist. Komponentenweise lautet diese Gleichung

$$F_i = -\frac{\gamma\, m\, M}{|x|^3}\, x_i, \ \ i = 1, 2, 3.$$

Das bedeutet, dass die Kraftkomponenten F_1, F_2, F_3 jeweils abhängig von x_1, x_2, x_3 sind und daher Funktionen dreier Veränderlicher darstellen: $F_i = F_i(x_1, x_2, x_3)$.

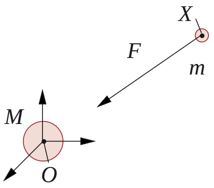

Bild 1.2 Gravitationskraft F

Definition 1.3

Der **natürliche Definitionsbereich** einer Funktion f ist diejenige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, für die die Zuordnung f erklärt ist.

Natürlicher Definitionsbereich

Beispiel 1.4

1. Die Funktion $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$ hat den natürlichen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^2$, da *jeder* Stelle $(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ durch diese Vorschrift eine reelle Zahl zugeordnet werden kann.
2. Die Funktion $R(R_1, R_2) = \dfrac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}$ hat als natürlichen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(R_1, R_2)^\top : R_1 = -R_2\}$, da der Nenner in der Funktionsvorschrift für $R_1 = -R_2$ null wird und somit der Bruch nicht erklärt ist. Der *für das physikalische Gesetz relevante Definitionsbereich* ist allerdings lediglich $\{(R_1, R_2)^\top : R_1 > 0 \wedge R_2 > 0\}$, da Widerstände positiv sind.
3. Die Funktionen $F_i(x_1, x_2, x_3) = -\dfrac{\gamma\, m\, M}{|x|^3}\, x_i, \ \ i = 1, 2, 3,$ haben als natürlichen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)^\top\}$, da der Nenner in den Funktionsvorschriften genau dann null ist, wenn $|x| = 0$ gilt, also $x = (0, 0, 0)^\top$ ist. In diesem Fall fallen die Schwerpunkte der Körper mit den Massen M und m zusammen.

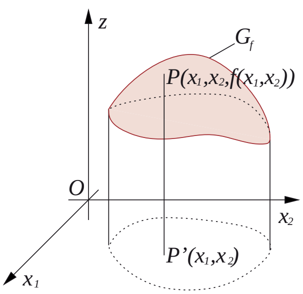

Bild 1.3 Graph einer Funktion $z = f(x_1, x_2)$

Die wesentlichen Unterschiede von Funktionen einer bzw. mehrerer Veränderlicher bestehen bereits für die Fälle $n = 1$ und $n = 2$. Für Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen kann verallgemeinert werden. Daher werden im Folgenden vorwiegend Funktionen zweier Veränderlicher studiert.

Graphische Darstellung

Die gleichzeitige graphische Darstellung von Definitionsbereich und Funktionswerten ist nur für Funktionen von bis zu zwei Veränderlichen möglich, da andernfalls mehr als drei Dimensionen dafür benötigt werden. Im Folgenden werden Möglichkeiten der graphischen Darstellung von Funktionen zweier Veränderlicher erläutert.

Im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem mit den Achsen x_1, x_2, z und dem Koordinatenursprung O wird der Definitionsbereich

D_f durch eine Teilmenge der (x_1, x_2)-Ebene dargestellt. Jeder Stelle $(x_1, x_2)^\top$ des Definitionsbereiches mit dem zugehörigen Punkt P' kann mit der Funktion $z = f(x_1, x_2)$ ein Punkt P mit dem Ortsvektor $(x_1, x_2, z)^\top \in \mathbb{R}^3$ zugeordnet werden. Der Punkt P' ist die **Projektion** des Punktes P auf die (x_1, x_2)-Ebene. Die Menge aller zugeordneten Punkte P bildet i. Allg. eine Oberfläche im Raum $\mathbb{R}^3$ (siehe **Bild 1.3**).

Definition 1.5

Die Menge der Punkte $G_f = \{(x_1, x_2, z) \colon (x_1, x_2)^\top \in D_f,\ z = f(x_1, x_2)\}$ heißt **Graph** der Funktion f.

Beispiel 1.6

Graphen von Funktionen

1. Der Graph der Funktion $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$ (vergleiche **Beispiel 1.4**) ist eine Ebene mit der Gleichung $z = -4x_1 - 2x_2 + 4$ (siehe **Bild 1.4**). Ihre Achsenabschnittsgleichung lautet $x_1 + \dfrac{x_2}{2} + \dfrac{z}{4} = 1$.
2. Der Graph der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ heißt **Kreisparaboloid** (siehe **Bild 1.5**). Für $x_2 = 0$ folgt aus der Funktionsgleichung $f(x_1, 0) = x_1^2$. Die Menge der zugeordneten Punkte P ist eine Normalparabel in der (x_1, z)-Ebene. Analog folgt für $x_1 = 0$ aus der Funktionsgleichung $f(0, x_2) = x_2^2$. Die Menge der zugeordneten Punkte P ist eine Normalparabel in der (x_2, z)-Ebene. Für $z = c$, $c \geq 0$, folgt aus der Funktionsgleichung $c = x_1^2 + x_2^2$. Die Menge der zugeordneten Punkte P in der Ebene $z = c$ parallel zur (x_1, x_2)-Ebene ist jeweils ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(0, 0, c)$ und dem Radius $\sqrt{c}$.

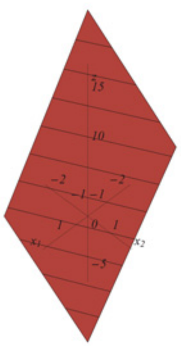

Bild 1.4 $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$

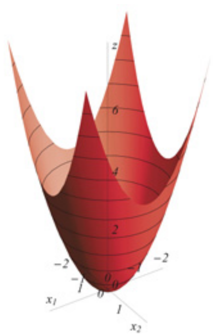

Bild 1.5 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

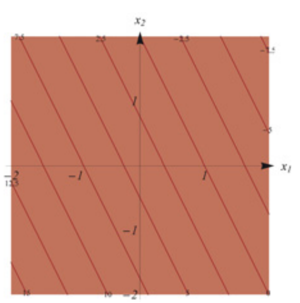

Bild 1.6 Isolinien $c = -4x_1 - 2x_2 + 4$

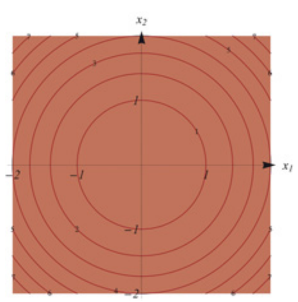

Bild 1.7 Isolinien $c = x_1^2 + x_2^2$

Definition 1.7

Ist $f(x_1, x_2)$ eine Funktion zweier Veränderlicher mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, so heißen die Punktmengen
$I_c = \{(x_1, x_2, z)\colon (x_1, x_2)^\top \in D_f,\ z = f(x_1, x_2) = c\}$
Isolinien von f mit der Höhe c.

Isolinien

Beispiel 1.8

1. Die Funktion $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$ (vergleiche **Beispiel 1.4 und 1.6**) hat als Isolinien Geraden (siehe **Bild 1.6**). Für die konstante Höhe $z = f(x_1, x_2) = c$ folgt aus der Funktionsgleichung

   $$c = -4x_1 - 2x_2 + 4.$$

   Umstellen nach x_2 liefert die Geradengleichung

   $$x_2 = -2x_1 + 2 - \frac{c}{2}.$$

   Diese Geraden sind parallel (sie haben alle dienselbe Steigung -2) und schneiden die x_2-Achse im Punkt $(0,\ 2 - c/2)$.

2. Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ (vergleiche **Beispiel 1.6**) hat für die konstante Höhe $z = f(x_1, x_2) = c$ als Isolinien Kreise mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und dem Radius $\sqrt{c}$ (siehe **Bild 1.7**).

1.2 Grenzwerte, Stetigkeit, partielle Ableitungen

Der Begriff des Grenzwertes und der Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher basiert – wie auch bei Funktionen einer Veränderlichen – auf der Konvergenz von Folgen von Argumenten gegen eine Stelle des Definitionsbereiches. Partielle Ableitungen sind die Grenzwerte von Differenzenquotienten bezüglich einer der Veränderlichen. Für Funktionen zweier Veränderlicher ist die geometrische Interpretation ihrer partiellen Ableitungen möglich.

Grenzwerte

Abstand

In [3] wurde bereits der Begriff der Länge eines Vektors erklärt, der in diesem Abschnitt ebenfalls Anwendung findet. Der **Abstand** zweier Punkte X und Y, die den Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ entsprechen, ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{XY}$, also die Zahl

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Definition 1.9

1. Eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, die jeder natürlichen Zahl k ein Element $a_k \in \mathbb{R}^n$ zuordnet, heißt **Folge** im $\mathbb{R}^n$. Sie wird mit $\{a_k\}$ bezeichnet.
2. Die Folge $\{a_k\} \in \mathbb{R}^n$ **konvergiert** gegen die Stelle $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, wenn gilt

   $$\lim_{k\to\infty} |a_k - \bar{x}| = 0.$$

   Die Stelle $\bar{x}$ heißt **Grenzwert** der Folge $\{a_k\}$, der wie folgt bezeichnet wird

   $$\lim_{k\to\infty} a_k = \bar{x}.$$

Beispiel 1.10

Folgen und Grenzwert

1. Betrachtet wird die Folge mit den Gliedern $a_k = \left(2^{2-k}, 2^{1-k}\right)^\top$, $k \in \mathbb{N}$ (siehe **Bild 1.8**). Die ersten Folgenglieder lauten $(2,1)^\top$, $(1,0.5)^\top$, $(0.5,0.25)^\top$, … Es wird gezeigt, dass diese Folge gegen die Stelle $\bar{x} = (0,0)^\top$ konvergiert. Nach **Definition 1.9** wird $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k - \bar{x}|$ berechnet. Es ist

   $$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} |a_k - \bar{x}| &= \lim_{k\to\infty} \sqrt{(2^{2-k}-0)^2+(2^{1-k}-0)^2} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{2^{2(2-k)}+2^{2(1-k)}}\\ &= \lim_{k\to\infty} \sqrt{(2^{2\cdot 2}+2^2)2^{-2k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{20}/2^k = 0.\end{aligned}$$

2. Betrachtet wird die Folge mit den Gliedern $a_k = (\sin(k\pi/2), 1/k^2)^\top$, $k \in \mathbb{N}$ (siehe **Bild 1.9**). Die ersten Folgenglieder sind
   $(1,1)^\top$, $(0,1/4)^\top$, $(-1,1/9)^\top$, $(0,1/16)^\top$, $(1,1/25)^\top$, …
   Die Punkte, die diesen Folgengliedern entsprechen, liegen abwechselnd auf den Geraden $x_1 = 1$, $x_1 = 0$, $x_1 = -1$. Es gibt keinen Punkt $\bar{x}$ in der Ebene so, dass der Abstand der Folgenglieder zu diesem Punkt gegen null konvergiert. Welcher Punkt auch immer gewählt wird, der Abstand derjenigen (unendlich vielen) Folgenglieder zu diesem Punkt, die auf den Geraden liegen, auf denen dieser Punkt sich nicht befindet, ist stets mindestens so groß wie der Abstand dieses Punktes zu den Geraden selbst.

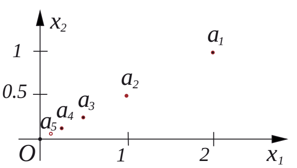

Bild 1.8 Folge $a_k = (2^{2-k}, 2^{1-k})^\top$

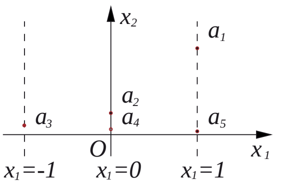

Bild 1.9 Folge $a_k = (\sin(k\pi/2), 1/k^2)^\top$

Definition 1.11

Eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ hat für $x \to \bar{x}$ den **Grenzwert** $c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = c,\ \ x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

wenn für *jede* gegen $\bar{x}$ konvergente Folge $\{a_k\}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = c.$$

Beispiel 1.12

Grenzwert einer Funktion

Der Grenzwert der Funktion $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^3$ für $x \to \bar{x} = (2,3)^\top$ ist zu ermitteln (siehe **Bild 1.10**).

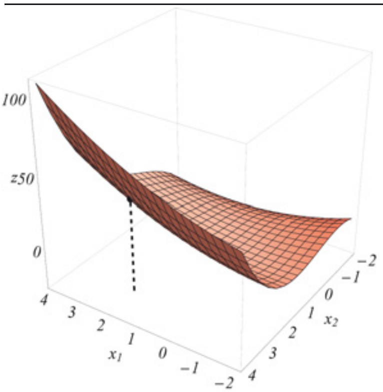

Bild 1.10 $f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^3$

Für jede Folge $\{a_k\} = \{(a_{k1}, a_{k2})^\top\}$, die gegen $\bar{x} = (2,3)^\top$ konvergiert, gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{k1} = 2 \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} a_{k2} = 3.$$

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte konvergenter Zahlenfolgen (siehe z. B. [3]) ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} f(a_{k1}, a_{k2}) &= \left(\lim_{k\to\infty} a_{k1}\right)^2 + 2 \lim_{k\to\infty} a_{k1} \lim_{k\to\infty} a_{k2} + \left(\lim_{k\to\infty} a_{k2}\right)^3 \\ &= 2^2 + 2\cdot 2\cdot 3 + 3^3 = 43.\end{aligned}$$

Stetigkeit

Definition 1.13

Eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **stetig** an der Stelle $\bar{x} \in D_f$, wenn gilt

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

Die Funktion heißt **stetig**, wenn f an jeder Stelle des Definitionsbereiches D_f stetig ist.

Stetigkeit

Beispiel 1.14

Die Funktion

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1,x_2)^\top \neq (0,0)^\top, \\ 0, & (x_1,x_2)^\top = (0,0)^\top \end{cases}$$

(siehe **Bild 1.11**) ist *stetig* für alle $(x_1,x_2)^\top \neq (0,0)^\top$.

Für $(x_1,x_2)^\top = (0,0)^\top$ hingegen ist $f(x_1,x_2)$ *nicht stetig*. Wird z. B. die Folge mit den Gliedern $a_k = (1/k, 0)^\top$ gewählt, die gegen die Stelle $(0,0)^\top$ konvergiert, so ist der Grenzwert der Folge der zugehörigen Funktionswerte *nicht* der Funktionswert $f(0,0) = 0$:

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1/k^2 - 0}{1/k^2 + 0} = 1 \neq f(0,0).$$

Auch für die Folge mit den Gliedern $a_k = (2/k, 1/k)^\top$, die gegen die Stelle $(0,0)^\top$ konvergiert, ist der Grenzwert der Folge der zugehörigen Funktionswerte *nicht* der Funktionswert $f(0,0) = 0$:

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{4/k^2 - 1/k^2}{4/k^2 + 1/k^2} = \frac{3}{5} \neq f(0,0).$$

Offenbar ist der Grenzwert der Folge der Funktionswerte von $f(x_1,x_2)$ für verschiedene gegen die Stelle $(0,0)^\top$ konvergierende Folgen nicht derselbe. Damit hat die Funktion $f(x_1,x_2)$ an der Stelle $(0,0)^\top$ *keinen* Grenzwert und ist daher dort nicht stetig.

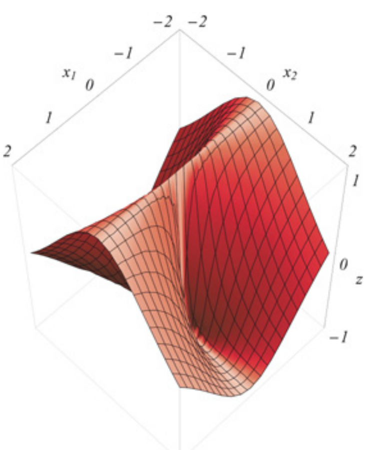

Bild 1.11 $f(x_1,x_2)=(x_1^2-x_2^2)/(x_1^2+x_2^2)$

Die Rechenregeln für die Grenzwerte von Folgen bzw. Funktionen sind analog zu denen von Funktionen einer Veränderlichen. Insbesondere sind Summe, Produkt und Quotient (Nennerfunktion ungleich null) stetiger Funktionen ebenfalls wieder stetige Funktionen.

Partielle Ableitungen

Definition 1.15

Sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Existiert für ein $i \in \{1, ..., n\}$ an einer festen Stelle $(x_1, ..., x_n)^\top$ der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i},$$

so heißt er **partielle Ableitung** von f nach x_i an der Stelle $(x_1, ..., x_n)^\top$ und wird wie folgt bezeichnet:

$$f_{x_i}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n).$$

Die Funktion f ist dort **partiell differenzierbar** nach x_i.

Beispiel 1.16

Differenzierbarkeit und Ableitungen

1. Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^3$ ist an jeder Stelle des $\mathbb{R}^2$ nach x_1 und nach x_2 partiell differenzierbar. Es ist

   $f_{x_1} = 2x_1 + 2x_2 \qquad \text{und} \qquad f_{x_2} = 2x_1 + 3x_2^2.$

2. Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ mit dem Definitionsbereich

   $D_f = \{(x_1, x_2)^\top : 0 < x_1 < \infty, \ -\infty < x_2 < \infty\}$

   ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches nach x_1 und nach x_2 partiell differenzierbar. Es ist

   $f_{x_1} = x_2 x_1^{x_2 - 1} \qquad \text{und} \qquad f_{x_2} = x_1^{x_2} \ln x_1.$

3. Die Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{e}^{x_2 x_3} + x_3$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^3$ ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich partiell differenzierbar nach x_1, x_2 und x_3. Es ist

   $f_{x_1} = 0 \qquad \text{und} \qquad f_{x_2} = x_3\, \mathrm{e}^{x_2 x_3} \qquad \text{und} \qquad f_{x_3} = x_2\, \mathrm{e}^{x_2 x_3} + 1.$

Bemerkung 1.17

1. Der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0}$ in **Definition 1.15** der partiellen Ableitung bezieht sich nur auf die Veränderung der i-ten Veränderlichen x_i der Argumente von f. Alle anderen Argumente sind fest. Die entsprechende partielle Ableitung nach x_i ist daher gleich der gewöhnlichen Ableitung von f nach x_i, wenn alle anderen Argumente als konstant betrachtet werden.

2. Die partielle Ableitung f_{x_i} an der Stelle $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)^\top$ ist gleich der Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(\bar{x}_1, ..., x_i, ..., \bar{x}_n)$ *der einen Veränderlichen* x_i an der Stelle $\bar{x}_i$.

   Für eine Funktion zweier Veränderlicher x_1 und x_2 lauten die Gleichungen der beiden Tangenten (Geraden im Raum)

   $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

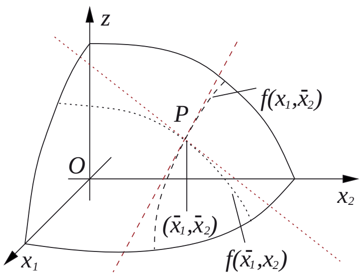

Bild 1.12 Tangenten an den Graphen von f, Stelle $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)^\top$

Hermann Amandus Schwarz
(* 25. Januar 1843 in Hermsdorf, Schlesien, † 30. November 1921 in Berlin)

deutscher Mathematiker, Professor für Mathematik in Halle, Zürich, Göttingen, Berlin, Mitglied der preußischen Akademie der Wissenschaften (1882), der Leopoldina (1985) und der Russischen Akademie der Wissenschaften (1897)

Funktionentheorie, Theorie der Minimalflächen, Schwarz-Christoffel-Transformation, Arbeiten zur hypergeometrischen Differentialgleichung, Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Spiegelungsprinzip von Schwarz, Alternierendes Verfahren von Schwarz zur Gebietszerlegung bei der Lösung elliptischer partieller Differentialgleichungen

hier: Satz von Schwarz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix}.$$

Sie spannen die sogenannte **Tangentialebene** auf, die den Graphen der Funktion $z = f(x_1, x_2)$ im Punkt $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, f(\bar{x}_1, \bar{x}_2))$ berührt (siehe **Bild 1.12**).

3. Existieren für eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ die partiellen Ableitungen bezüglich jedes Argumentes, so heißt f auf D_f **differenzierbar**.

4. Die Rechenregeln für das Bilden der partiellen Ableitungen nach einer bestimmten Veränderlichen sind analog zu denen für Funktionen einer Veränderlichen. Alle anderen Veränderlichen werden dabei als konstant betrachtet.

5. Partielle Ableitungen höherer Ordnung ergeben sich als partielle Ableitungen der partiellen Ableitungen (die ihrerseits Funktionen mehrerer Veränderlicher sind). So ist z. B.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = f_{x_1x_1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = f_{x_1x_2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = f_{x_2x_1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = f_{x_2x_2}.$$

6. Nach dem **Satz von Schwarz** ist für eine auf ihrem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ p-mal stetig differenzierbare Funktion f die Reihenfolge des Differenzierens beim Bilden einer q-ten partiellen Ableitung mit $q \leq p$ unerheblich. Insbesondere gilt für zweimal stetig differenzierbare Funktionen f

$$f_{x_ix_j} = f_{x_jx_i}, \; i, j = 1, ..., n, \; i \neq j. \tag{1.1}$$

1.3 Gradient, partielles und totales Differenzial, Fehlerrechnung

Der Gradient einer differenzierbaren Funktion mehrerer Veränderlicher hat zentrale Bedeutung. Er gibt z. B. die Richtung der steilsten Steigung an. Mit seiner Hilfe kann das totale Differenzial berechnet werden, das bei der näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten und insbesondere bei der Fehlerrechnung verwendet wird.

Gradient

Definition 1.18

Ist eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ an einer Stelle $x \in D_f$ nach allen n Veränderlichen partiell differenzierbar, so heißt der Vektor der ersten partiellen Ableitungen von f **Gradient** von f an der Stelle x:

$$\operatorname{grad} f(x) = (f_{x_1}(x),\ \ldots,\ f_{x_n}(x))^\top .$$

Der Gradient weist in Richtung der steilsten Steigung der Funktion f an der Stelle x.

Beispiel 1.19

Gradient an einer Stelle

Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 10x_2 - 40 = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 + 10$$

(siehe **Bild 1.13**) hat den Gradienten grad $f(x_1, x_2) = (-2x_1 + 10, -2x_2 + 10)^\top$. An der Stelle $x = (4, 4)^\top$ ergibt sich z. B. grad $f(4, 4) = (2, 2)^\top$, an der Stelle $x = (3, 6)^\top$ ergibt sich grad $f(3, 6) = (4, -2)^\top$.

Der Graph der Funktion f ist ein Kreisparaboloid. Seine Isolinien sind Kreise mit dem Mittelpunkt $M(5, 5)$. In **Bild 1.14** sind die Isolinien zusammen mit den beiden Gradienten dargestellt.

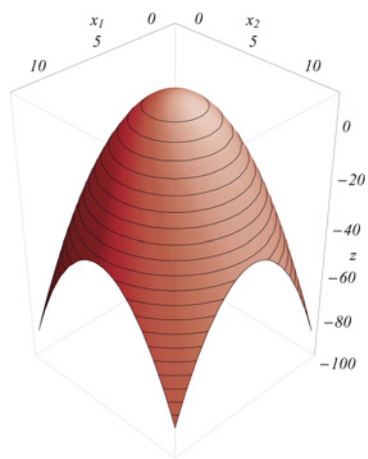

Bild 1.13 $f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 10x_2 - 40$

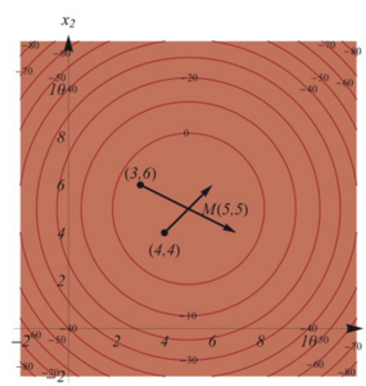

Bild 1.14 Isolinien, Gradienten

Partielles und totales Differenzial

Das Differenzial df der an einer festen Stelle $x = \bar{x}$ differenzierbaren Funktion f *einer* Veränderlichen mit der Abweichung Δx ist erklärt als

$$\mathrm{d}f(\Delta x) = f'(\bar{x})\Delta x,$$

und für den Funktionswert $f(\bar{x} + \Delta x)$ gilt näherungsweise (siehe [3])

$$f(\bar{x} + \Delta x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\Delta x = f(\bar{x}) + \mathrm{d}f(\Delta x).$$

Wird bei einer Funktion $f(x_1, x_2)$ *zweier* Veränderlicher eine Stelle $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^\top$ betrachtet und wird $\bar{x}_2$ fixiert, so resultiert die Funktion $f(x_1, \bar{x}_2)$, die jetzt nur noch von der *einen* Veränderlichen x_1 abhängt. Für den Funktionswert $f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2)$ gilt dann

$$f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2) \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + f_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_1 = f(\bar{x}) + \mathrm{d}f_{x_1}(\Delta x_1),$$

mit dem **partiellen Differenzial** nach der Veränderlichen x_1

$$\mathrm{d}f_{x_1}(\Delta x_1) = f_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_1 = f_{x_1}(\bar{x})\Delta x_1.$$

Das partielle Differenzial nach der Veränderlichen x_1 gibt näherungsweise den Funktionswertzuwachs der Funktion f an, wenn von der Stelle $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^\top$ *nur in Richtung der x_1-Koordinate* um Δx_1 abgewichen wird. Analog ergibt sich bei fixiertem $\bar{x}_1$ und der Abweichung Δx_2

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + \Delta x_2) \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + f_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_2 = f(\bar{x}) + \mathrm{d}f_{x_2}(\Delta x_2)$$

mit dem **partiellen Differenzial** nach der Veränderlichen x_2

$$\mathrm{d}f_{x_2}(\Delta x_2) = f_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_2 = f_{x_2}(\bar{x})\Delta x_2.$$

Entsprechend ist für eine Funktion f mit n Veränderlichen $x_1, ..., x_n$ das partielle Differenzial nach der Veränderlichen x_i an der Stelle $\bar{x}$

Partielles Differenzial

$$\mathrm{d}f_{x_i} = f_{x_i}(\bar{x})\Delta x_i,\ \ \Delta x_i \in \mathbb{R},\ \ i = 1, ..., n.$$

Definition 1.20
Totales Differenzial

Sei f eine auf dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ differenzierbare Funktion, $\bar{x} \in D_f$ eine feste Stelle und $\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)^\top$ ein reeller Vektor. Die Funktion des Vektors $\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)^\top$

$$\mathrm{d}f(\Delta x) = (\mathrm{grad} f(\bar{x}), \Delta x) = f_{x_1}(\bar{x})\Delta x_1 + ... + f_{x_n}(\bar{x})\Delta x_n \tag{1.2}$$

heißt **totales Differenzial** der Funktion f an der Stelle $\bar{x}$.

Näherung von Funktionswerten

Das totale Differenzial $\mathrm{d}f(\Delta x)$ der Funktion f an der Stelle $\bar{x}$ gibt näherungsweise den Zuwachs des Funktionswertes von f an, wenn von der Stelle $\bar{x}$ in eine *beliebige* Richtung mithilfe des Vektors Δx abgewichen wird. An der Stelle $x = \bar{x} + \Delta x$ gilt die Näherungsformel

$$f(x) = f(\bar{x} + \Delta x) \approx f(\bar{x}) + \mathrm{d}f(\Delta x). \tag{1.3}$$

Beispiel 1.21

Für die Funktion

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 10x_2 - 40 = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 + 10$$

aus **Beispiel 1.19** mit dem Funktionswert $f(7, 4) = 5$ soll näherungsweise der Funktionswert an den Stelle $(7.2, 4.3)^\top$ und $(7.2, 4.1)^\top$ mithilfe des totalen Differenzials ermittelt werden.

Es ist $\bar{x} = (7, 4)^\top$, $f_{x_1} = -2x_1 + 10$, $f_{x_2} = -2x_2 + 10$.

An der Stelle $(7.2, 4.3)^\top$ ergibt sich mit $\Delta x = (0.2, 0.3)^\top$ das totale Differenzial
$\mathrm{d}f(0.2, 0.3) = f_{x_1}(7, 4) \cdot 0.2 + f_{x_2}(7, 4) \cdot 0.3 = (-4) \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 = -0.2$.
Als näherungsweiser Funktionswert ergibt sich nach Gleichung (1.3)
$f(7.2, 4.3) \approx f(7, 4) - 0.2 = 5 - 0.2 = 4.8$.
Der genaue Funktionswert ist $f(7.2, 4.3) = 4.67$.

An der Stelle $(7.2, 4.1)^\top$ ergibt sich analog mit $\Delta x = (0.2, 0.1)^\top$
$\mathrm{d}f(0.2, 0.1) = f_{x_1}(7, 4) \cdot 0.2 + f_{x_2}(7, 4) \cdot 0.1 = (-4) \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = -0.6$.
Damit ist der näherungsweise Funktionswert
$f(7.2, 4.1) \approx f(7, 4) - 0.6 = 5 - 0.6 = 4.4$.
Der genaue Funktionswert ist $f(7.2, 4.1) = 4.35$.

Fehlerrechnung

Wie bereits bei Funktionen einer Veränderlichen finden Differenzial und näherungsweise Funktionswertberechnung auch bei Funktionen mehrerer Veränderlicher Anwendung bei der Fehlerrechnung. Dabei wer-

Sachwortverzeichnis