

1.1 Stationäre Strömung ohne Reibung

Das „ideale Fluid“ ist reibungsfrei und inkompressibel. Dichteunterschiede durch Druckunterschiede werden vernachlässigt.

1.1.1 Kontinuitätsgleichung

Aus dem **Satz von der Erhaltung der Masse** folgt für ein inkompressibles Fluid:

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot A_1 \cdot c_1 = \rho \cdot A_2 \cdot c_2 = \dots = \text{konst.} \quad (1.1)$$

\dot{m} = Massenstrom in kg/s

\dot{V} = Volumenstrom in m³/s

ρ = Dichte in kg/m³ ($1/\rho = \nu$)

A = Rohrquerschnitt in m²

c = Strömungsgeschwindigkeit in m/s

Das heißt, bei einer stationären Rohrströmung fließt durch jeden Querschnitt des Rohres immer der gleiche Massenstrom. Diese Gesetzmäßigkeit drückt die **Kontinuitätsgleichung** aus.

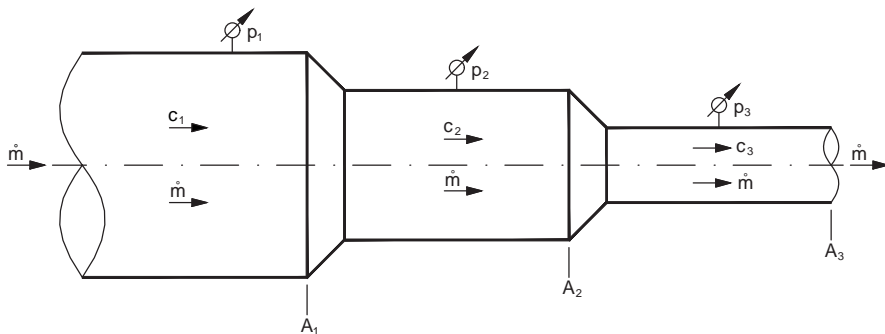


Abb. 1.2: Abgestufte Rohrleitung zu Gleichung 1.1

Die Kontinuitätsgleichung für kompressible Fluide lautet:

$$\dot{m} = \rho_1 \cdot A_1 \cdot c_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot c_2 = \rho_3 \cdot A_3 \cdot c_3 = \text{konst.} \quad (1.1a)$$

Beispiel 1.1

Aus einem Rohr mit einem Innendurchmesser von $d_1 = 150$ mm, das sich auf einen Innendurchmesser $d_2 = 110$ mm verjüngt, strömt Wasser von $\dot{V} = 75$ m³/12 min. Die Wasserdichte beträgt $\rho = 1000$ kg/m³.

Gesucht: a) Volumenstrom \dot{V} in m³/s

b) Massenstrom \dot{m} in kg/s

c) Strömungsgeschwindigkeiten c_1 , c_2

Zu a)

$$\dot{V} = \frac{75 \text{ m}^3}{12 \text{ min} \cdot 60} = \frac{75 \text{ m}^3}{720 \text{ s}} = 0,1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Der Volumenstrom beträgt $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$.

Zu b)

$$\dot{m} = \dot{V} \cdot \rho = 0,1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 100 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Der Massenstrom beträgt 100 kg/s .

Zu c)

$$c_1 = \frac{\dot{V}}{A_1} = \frac{\dot{V}}{\pi/4 \cdot d_1^2} = \frac{0,1 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi/4 \cdot (0,15 \text{ m})^2} = 5,66 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Strömungsgeschwindigkeit c_1 beträgt $5,66 \text{ m/s}$.

$$c_2 = \frac{\dot{V}}{A_2} = \frac{\dot{V}}{\pi/4 \cdot d_2^2} = \frac{0,1 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi/4 \cdot (0,11 \text{ m})^2} = 10,53 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Strömungsgeschwindigkeit c_2 beträgt $10,53 \text{ m/s}$.

1.1.2 Energiegleichung längs einer Stromröhre – Gleichung von Bernoulli – Energiesatz

Nach Abbildung 1.2:

Strömt ein Fluid mit dem Volumen V und der Masse m ohne Höhenunterschied durch ein waagrecht verengendes Rohr oder Kanal, so erhöht sich die Strömungsgeschwindigkeit von c_1 auf c_2 (bzw. von c_2 auf c_3). Nach den Gesetzen der Dynamik ist der Zuwachs an kinetischer Energie gleich dem Volumendifferenzdruck:

$$(\rho_1 - \rho_2) \cdot V = \frac{m}{2} \cdot (c_2^2 - c_1^2);$$

mit $\rho = \frac{m}{V}$ wird:

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{\rho}{2} (c_2^2 - c_1^2)$$

oder:

Bernoulli-Gleichung

$$\rho + \frac{\rho}{2} \cdot c^2 = \text{konst.} \quad (1.2)$$

bzw. zu Abb. 1.2:

$$\rho_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 = \rho_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 = \rho_3 + \frac{\rho}{2} \cdot c_3^2 = \text{konst.} \quad (1.2a)$$

Man nennt:

ρ = **statischer Druck** (Wanddruck) in Pa

$\frac{\rho}{2} \cdot c^2$ = **dynamischer Druck** oder Geschwindigkeitsdruck oder **Staudruck** in Pa

$\rho + \frac{\rho}{2} \cdot c^2 = \rho_{\text{ges}}$ = **Gesamtdruck** in Pa

Beispiel 1.2

Wie groß ist der Druck p_2 auf die Rohrwandung in Abbildung 1.2 unter folgenden Bedingungen:

$$p_1 = 1 \text{ bar}$$

$$c_1 = 10 \text{ m/s}$$

$$c_2 = 20 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

Lösung:

$$p_1 = 1 \text{ bar} = 100.000 \text{ Pa} = 100.000 \text{ kg/ms}^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(c_2^2 - c_1^2);$$

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho}{2}(c_2^2 - c_1^2) = 100000 \text{ Pa} - 0,6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} (400 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = 99820 \text{ Pa}$$

Der Druck p_2 auf die Rohrwandung beträgt 99820 Pa.

Weist die Stromröhre einen Höhenunterschied auf (siehe Abbildung 1.3), so stellt sich die Bernoulli-Gleichung 1.2a wie folgt dar:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2 = \text{konst.} \quad (1.3)$$

Die Gleichung 1.3 ist die spezifische **Bernoulli-Druckgleichung**.

$$\Delta p_v = \left(0,02 \cdot \frac{3\text{m}}{0,05\text{m}} + 26,75 \right) \cdot \frac{0,78\text{kg/m}^3}{2} \cdot 20,38 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 4527,5 \text{ Pa}$$

$$p = 4527,5 + 1000 = 5527,5 \text{ Pa} = 55,28 \text{ mbar}$$

Als Fließdruck an der Liefergrenze ist ein Druck von 55,28 mbar zuzüglich Brennerwiderstand (Stauscheibe) erforderlich.

3.2 Wasserleitungen

3.2.1 Freie natürliche Strömung

Ursache der freien Strömung ist die Schwerkraft. Gerinneströmungen in natürlichen Fließgewässern oder in künstlich angelegten Kanälen weisen eine freie Oberfläche zur Luft auf, d. h., nur ein Teil des Querschnittumrisses bildet den benetzten Umfang.

Kanäle werden meistens mit regelmäßigem, über große Längen konstant bleibendem Querschnitt A angelegt. Natürliche Fließgewässer haben dagegen einen sehr unregelmäßigen, gegliederten Querschnittsverlauf, häufig mit Pflanzenbewuchs. Oft führen Flüsse auch Geschiebe aus Kies, Sand oder Felsbrocken mit sich, was die Berechnung der Strömung außerordentlich erschwert.

Der vorliegende Abschnitt ist nur als Einführung gedacht und beschränkt sich auf die Anwendung der Strömungsgesetze für Kanäle (Entwässerung) in der Gebäudetechnik. Die natürliche Strömung findet

- a) in offenen Gerinnen und
 - b) im Ausfluss aus Behältern
- statt.

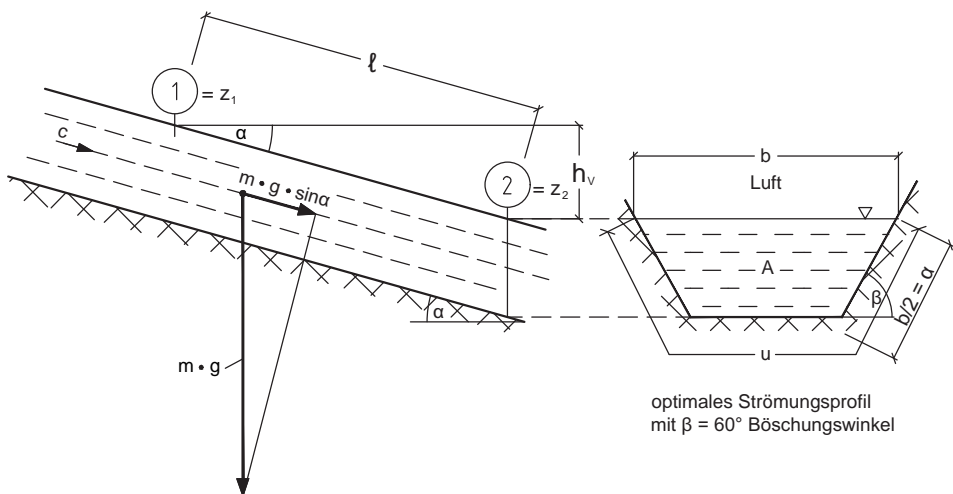


Abb. 3.12: Gleichförmige Strömung in offenen Gerinnen (Kanalströmung)

Spiegelgefälle J (oder Sohlengefälle):

$$J = \sin \alpha = \frac{z_1 - z_2}{l} = \frac{h}{l}$$

Zwischen der hangabtreibenden Komponente $m \cdot g \cdot \sin \alpha$ und dem Reibungswiderstand muss Gleichgewicht bestehen.

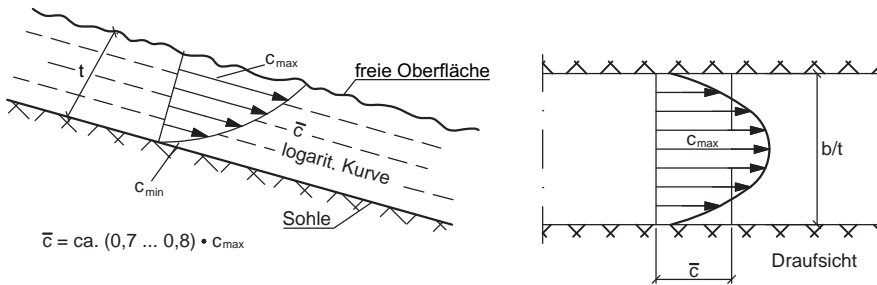


Abb. 3.13: Geschwindigkeitsverteilung in einem offenen Kanal

Das Geschwindigkeitsfeld im offenen Gerinne ist im Gegensatz zum vollgefüllten Kreisrohrquerschnitt asymmetrisch. An den Wänden und an der Sohle haftet das Wasser und die Strömungsgeschwindigkeit wird null.

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit \bar{c} ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung

$$\bar{c} = \frac{\dot{V}}{A}$$

Durch Anwendung der erweiterten Bernoulli-Gleichung Gleichung 1.5a auf die Abb. 3.12:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{c_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{c_2^2}{2g} + h_v$$

$$c_1 = c_2 ; A = \text{konst.} ; p_1 = p_2 = \text{Luftdruck}$$

$$z_1 - z_2 = h_v = \text{Reibungsverlusthöhe}$$

$$h_v = \frac{\Delta p_v}{\rho \cdot g} = \lambda \cdot \frac{l}{d_h} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2g}$$

$$d_h = \frac{4 \cdot A}{u} \text{ hydraulischer Durchmesser} \quad (3.1)$$

$$\text{Mit } J = \sin \alpha = \frac{z_1 - z_2}{l} = \frac{\lambda}{d_h} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2g} \quad (3.2)$$

J ist die universelle Fließformel.

Die Gleichung 3.1 kann näherungsweise auch auf teilweise ausgefüllte Querschnitte angewandt werden.

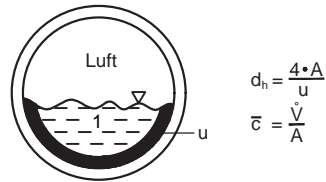


Abb. 3.14: Entwässerungskanal

Beispiel 3.12

Gegeben:

Ein trapezförmiger Kanal gemäß Abbildung 3.12 fällt auf 1200 m um 1,5 m. Die Kanalsole s ist 2,3 m breit, der Böschungswinkel beträgt $\beta = 50^\circ$ und die Gerinntiefe $t = 1,6$ m. $\lambda = 0,023$.

Gesucht:

Strömungsvolumen \dot{V}

$$A = \frac{s+b}{2} \cdot t$$

$$b = s + 2 \cdot \operatorname{tg}40^\circ \cdot t = 2,3\text{ m} + 2 \cdot \operatorname{tg} \cdot 0,84 \cdot 1,6\text{ m} = 4,99\text{ m}$$

$$A = \frac{2,3\text{ m} + 4,99\text{ m}}{2} \cdot 1,6\text{ m} = 5,83\text{ m}^2$$

$$u = s + 2a; a = \frac{1,35}{\sin 40^\circ} = 2,1\text{ m}$$

$$u = 2,3\text{ m} + 2 \cdot 2,1\text{ m} = 6,5\text{ m}$$

$$d_h = \frac{4 \cdot A}{u}$$

$$d_h = \frac{4 \cdot 5,83\text{ m}^2}{6,5\text{ m}} = 3,59\text{ m}$$

$$J = \frac{h}{l}$$

$$J = \frac{1,5\text{ m}}{1200\text{ m}} = 0,00125 \hat{=} 1,25\text{‰}$$

$$c = \sqrt{\frac{J \cdot d_h \cdot 2g}{\lambda}} = \sqrt{\frac{0,00125 \cdot 3,59\text{ m} \cdot 2 \cdot 9,81\text{ m/s}^2}{0,023}} = 1,96\text{ m/s}$$

$$\dot{V} = A \cdot c = 5,83\text{ m}^2 \cdot 1,96\text{ m/s} = 11,4\text{ m}^3/\text{s}$$